

Der Stochastische Abakus (SA)

ARTHUR ENGEL, FRANKFURT A. M.

Zusammenfassung: In dieser Arbeit wird ein eleganter Algorithmus eingeführt, um Probleme der diskreten WT zu behandeln. Er eignet sich für den gesamten Schulunterricht, einschließlich der Grundschule, wo wir ihn 1974 entdeckt haben. Durch die kleine Beschränkung auf rationale Wahrscheinlichkeiten gelingt es diskrete Probleme endlich zu machen.

Der SA ist ein Algorithmus, der eine endliche Anzahl von Chips verwendet, die durch einen endlichen Graphen fließen, dessen Kanten rationale Übergangswahrscheinlichkeiten haben. Zuerst wird ein stochastisches Problem in einen Graphen übersetzt, der als Spielbrett dient, auf dem man nach einer festen Spielregel (Axiom) spielt. Die Ergebnisse des Spiels sind nach Definition Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte. Die Motivierung erfolgt durch Häufigkeitsdeutung.¹

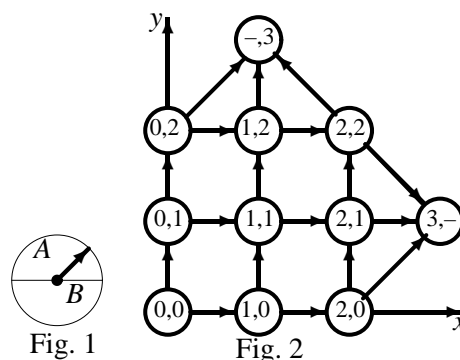
Wir werden eine Folge immer komplizierterer Probleme lösen, um die Macht und Flexibilität des SA zu zeigen und zugleich die Darstellung durch Graphen zu üben. Erst danach folgt die systematische Darstellung, die wir am Ende nur andeuten.

1. Beispiel. Die Aufteilung des Einsatzes

A und B vereinbaren folgendes Spiel: Jeder legt 8 Goldmünzen in einen Hut. Dann wird eine Münze geworfen, bis Wappen oder Zahl zum 3. Mal erscheint. Wer als Erster das Ziel erreicht, gewinnt den ganzen Einsatz von 16 Goldmünzen. Der erste Wurf ging zugunsten von A aus. Dann wird das Spiel abgebrochen. Finde die gerechte Aufteilung des Einsatzes.

Aus Gründen der historischen Pietät beginnen wir mit der 2. Aufgabe des Chevalier de Méré, die er 1654 dem französischen Mathematiker Pascal vorlegte. Die Aufgabe kam zuerst im 9. Jahrhundert auf. Nach acht Jahrhunderten erfolgloser Lösungsversuche hat sie Pascal als erster richtig gelöst und die Aufgabe in einem Briefwechsel P. Fermat mitgeteilt, mit der Aufforderung das Problem zu lösen. Postwendend schickte ihm Fermat seine Lösung, die ganz anders war als die Lösung von Pascal. Dieser Briefwechsel war der Ursprung der WT. Der 25jährige Christian Huyghens kam 1655 für einige Monate nach Paris, wo das Problem von den Pariser Mathematikern heftig disku-

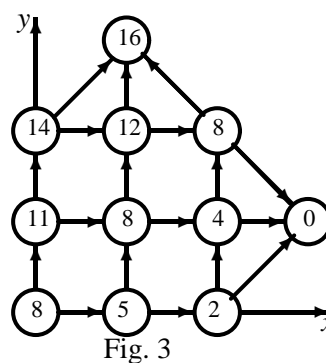
tiert wurde. Er war von dem Problem so begeistert, dass er schon 1657 dazu das Buch Huyghens (1657) schrieb. Zwar hatte Jerolamo Cardano schon 1530 ein Buch mit dem Titel *Liber de Ludo Aleae* geschrieben. Es wurde aber erst 1663 posthum publiziert (Cardano (1663)) und ist viel primitiver als das Buch von Huyghens.



Die Münze wird durch das Glücksrad in Fig. 1 dargestellt. Durch die Übersetzung:

- Ein Punkt für A \rightarrow ein Schritt nach oben
- Ein Punkt für B \rightarrow ein Schritt nach rechts

wird das Spiel in eine Irrfahrt auf dem Graphen in Fig. 2 übersetzt, die in $(0, 1)$ beginnt. Hier werden die äquivalenten Zustände $(0,3)$, $(1,3)$ und $(2,3)$ zu dem Zustand $(-3, 3)$ zusammengelegt (Gewinn von A) und die Zustände $(3,0)$, $(3,1)$, $(3,2)$ zu $(3, -)$ (Gewinn von B).



Die Lösung von Pascal in Fig. 3 ist genial. Rekursiv werden die einzelnen Zustände berechnet. Wir berechnen die Bewertung durch A. Im Zustand $(2,2)$ hat A gleiche Chancen 16 oder 0 zu gewinnen. Also hat $(2,2)$ für A den Wert 8. Die Vorwärtsnachbarn von

¹Der Leser muss jeden Graphen auf ein Blatt Papier zeichnen und nachspielen. Sonst wird er die Beispiele nicht verstehen. Als Chips verwendet man z.B. kleine Würfel. Der Lehrer arbeitet mit einem Overhead Projektor und Folien mit Graphen, auf denen Chips bewegt werden. Die in den absorbierenden Zuständen angekommenen Chips darf man wieder verwenden, wenn man ihre Anzahl dort anschreibt, wo sie ankommen.

(1,2) sind 8 und 16 je mit gleichen Wahrscheinlichkeiten. Daher hat (1,2) den Wert 12, das Mittel von 8 und 16. So können wir rekursiv alle Bewertungen durch A in Fig. 3 bestimmen. Wir sehen, dass A 11 Münzen bekommen muss, während für B 5 Münzen übrig bleiben. Pascal arbeitet hier mit Erwartungswerten. Auch Huyghens verwendet den Erwartungswert als Grundbegriff, wie auch sein Buch Huyghens (1657).

Die Lösung von Fermat wollen wir mit dem SA nachspielen. Fermat's Idee besteht darin das Spiel im Zustand (0,1) weiter zu spielen, bis man mit dem Gewinn von A oder B endet. Dazu starten wir in (0,1) mit zwei Chips und ziehen diese in Pfeilrichtung unter Respektierung der Übergangswahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$. Da von einem inneren Zustand keine Bewegung mehr möglich ist, so führen wir im Start zwei weitere Chips zu. Nach den Zug vom Start aus kann man auch von zwei inneren Zuständen ziehen. Wir ziehen in den inneren Zuständen in beliebiger Reihenfolge so lange, bis es nicht mehr geht. Erst dann legen wir zwei weitere Chips auf den Start. Wir fahren so lange fort, bis alle inneren Zustände leer sind. In den Endzuständen sind dann jeweils 11 und 5 Chips.

Man beachte, dass hier eine diskrete Masse durch einen Graphen fließt unter Respektierung der Übergangswahrscheinlichkeiten. Man kann diese Masse stets auf 1 normieren. Dann hat man genau die Wahrscheinlichkeitsdeutung für den Zufallsprozess. Für endliche Probleme ist dies schon lange bekannt. Neu ist die Ausdehnung auf Graphen mit Zyklen und Schleifen in den nächsten Problemen.

Fermat hat die Wörter gezählt, die zum Gewinn von A führen: $AA, ABA, BAA, ABBA, BABA$ und $BBAA$. Ein Wort der Länge zwei hat das Gewicht $1/4$, von der Länge drei $1/8$ und von der Länge vier $1/16$. Daher hat $(-, 3)$ das Gewicht

$$1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{11}{16}.$$

Hier ist es nicht interessant die mittlere Schrittzahl zu bestimmen. Wir wollen es trotzdem tun. Die Wörter $BBB, BABB, BBAB$ und $ABBB$ führen zum Gewinn von B . Die mittlere Schrittzahl aller 10 Wörter ist

$$\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{8} \cdot 3 + \frac{6}{16} \cdot 4 = \frac{50}{16} = 3\frac{1}{8}.$$

Dies liefert auch der SA, wenn man die Schrittzahl zählt und danach durch die Anzahl der Chips dividiert. Wenn der Graph Schleifen oder Zyklen enthält, so erhält man etwas Neues. Daher enthalten die folgenden Beispiele bis auf eine Ausnahme Zyklen oder Schleifen.

2. Beispiel. Vergleich zweier Algorithmen

Mit einer guten Münze will man *einen* Wurf eines symmetrischen Würfels erzeugen. Die Figuren 4 und 5 zeigen zwei Algorithmen:

- A1) 1. Erzeuge drei Würfe einer Münze XYZ .
 2. Wenn $X = Y = Z$, so gehe nach Zeile 1, sonst ist XYZ die Antwort im Zweiersystem.
- A2) 1. Erzeuge drei Würfe einer Münze XYZ .
 2. Solange $X = Y = Z$ ist, behalte X und erzeuge neue Y, Z . Dann ist XYZ die Antwort im Zweiersystem.

In Fig. 4 und 5 unterscheiden wir den Anfangszustand, die inneren Zustände und ganz unten die sechs Endzustände (absorbierende Zustände), von denen es nicht weitergeht.

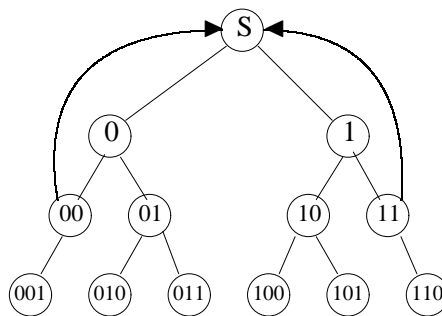


Fig. 4

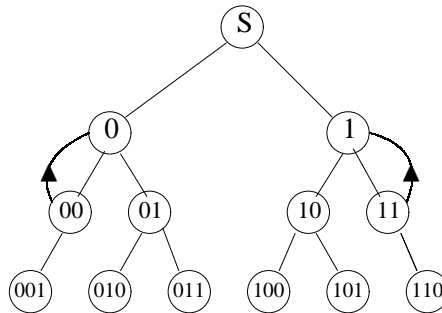


Fig. 5

Für jeden der beiden Algorithmen wollen wir beweisen, dass sie die Aufgabe lösen, wobei der zweite Algorithmus besser ist als der erste.

Dazu müssen wir beweisen, dass für jeden Baum die sechs Pfade zu den Endzuständen jeweils die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ haben.

Wir beginnen in Fig. 4 im Start Paare von Chips einzugeben. Nach jeder Eingabe ziehen wir, bis es nicht mehr geht und zählen die Schritte. Wir machen so lange weiter, bis nach 24 Schritten alle inneren Zustände leer sind und zwei Chips in den Start zurückkehren. Dann sind wir fertig. Es hat keinen Sinn weiter zu machen, da wir nach weiteren

24 Schritten wieder in den Start gelangen. Der Zufallsprozess hat einen reinen Zyklus.

Je ein Chip gelangt in jeden Endzustand. D.h., die Pfade sind gleichwahrscheinlich und die mittlere Laufzeit eines Chips ist $m = 24/6 = 4$. Mit anderen Worten, die mittlere Schrittzahl des Algorithmus ist 4. Beachte, dass es diesmal wegen der zwei Schleifen unendliche Pfade gibt. Aber diese kann man nie beobachten, da sie die Wahrscheinlichkeit 0 haben. Wenn wir A1) oft wiederholen, wird die mittlere Laufzeit immer genauer 4.

Wir machen dasselbe mit Fig. 5. Nur gelingt es uns nie alle inneren Zustände leer zu bekommen. Daher wollen wir in Zukunft alle inneren Zustände **kritisch laden**. D.h., in jeden inneren Zustand werden so viele Chips gelegt, dass man durch Addition eines weiteren Chips von diesem Zustand ziehen kann. In unserem Fall wird jeder innere Zustand mit einem Chip belastet. Das Spiel ist zu Ende, wenn diese kritische Ladung wiederkehrt. Dies ist nach 22 Schritten der Fall. Am Ende hat je ein Chip einen Zweig des Baumes zurückgelegt, d.h., alle 6 möglichen Ausfälle haben dieselbe Wahrscheinlichkeit und die gesamte Schrittzahl ist 22. Die mittlere Schrittzahl ist $22/6 = 3\frac{2}{3}$.

Warum ist dies so? Der SA ist ein endlicher Automat. Jeder endliche Automat hat das Verhalten in Fig. 6. Hier steht ein Punkt für einen *blockierenden Graphen*, d.h., einen Graphen, bei dem man von keinem Zustand ziehen kann. Dabei kann der „Schwanz“ auch fehlen.

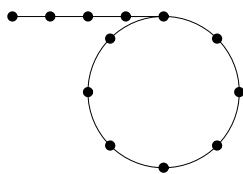


Fig. 6

Ich starte am Anfang des Schwanzes und durchlaufe den Zyklus unendlich oft. Der Zyklus wird immer mehr dominieren. Es genügt offensichtlich auf dem Zyklus zu starten und den Zyklus nur einmal zu durchlaufen. Aber wie findet man einen blockierenden Graphen auf dem Zyklus? Es gilt zum Glück der Satz:

Der kritische Graph liegt immer auf dem Zyklus.

Dies ist der einzige Satz, den ich nicht beweisen konnte, obwohl ich ihn nach 10 Minuten vermutete. Nur die Evidenz von 1000 Beispielen lag vor. Man sieht ihn leicht ein. Wir beginnen mit einem blockierenden Graphen auf dem Zyklus, der mit weißen Chips geladen ist. Wir füllen jeden inneren Zustand mit schwarzen Chips bis zum kritischen Zu-

stand. Nun spielen wir ohne die schwarzen Chips zu berühren. Wenn wir zum ursprünglichen blockierenden Graphen zurück kehren, dann hat sich auch der kritische Zustand wiederholt. Den ersten publizierten Beweis findet man in der Arbeit von Björner/Lovász (1992). Die oben skizzierte Überlegung fand schon Dr. Lothar Scheller 1975 (Schüler von Prof. Dr. H. Dinges), vom FB Mathematik in Frankfurt. Lovász hat diese Überlegung zu einem strengen Beweis ausgebaut.

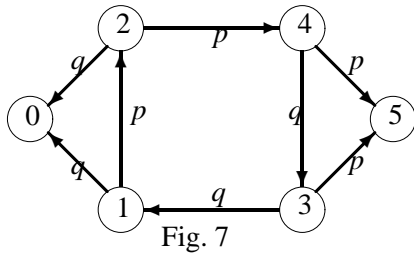
Wir wollen das Spiel auf dem SA präzisieren: Der SA hat einen oder mehrere *absorbierende Zustände*. Wähle irgendeinen der übrigen Zustände als *Start*. Die übrigen Zustände sind die *inneren Zustände*. Der SA ist ein orientierter Graph. Von jedem Zustand führen Zweige zu seinen Vorwärts-Nachbarn, die mit Brüchen mit der Summe 1 markiert sind. (Bei gleichen Brüchen werden sie oft nicht angeschrieben.) Nun wird jeder innere Zustand und der Start *kritisch geladen*. D.h., mit so vielen Chips, dass die Addition eines Chips einen Zug von diesem Zustand ermöglicht unter Respektierung der Übergangswahrscheinlichkeiten. Addiere einen Chip im Start und mache einen Zug von dort aus. Jetzt kann man von weiteren Zuständen ziehen. Wähle irgend einen Zustand, der überkritisch geladen ist und ziehe von dort aus. Fahre so lange fort, bis ein blockierender Graph verbleibt. Danach prüft man nach, ob der SA kritisch geladen ist. Wenn nicht, so wird der Start nachgeladen, bis ein Zug möglich ist. Nach endlich vielen Schritten kehrt der kritisch geladene Graph zurück. Dann stoppe. Die Chips sind auf die absorbierenden Zustände a_i im Verhältnis ihren Wahrscheinlichkeiten p_i verteilt. Zählt man die Schrittzahlen aller Chips, so erhält man nach Definition die erwartete Spieldauer mit Hilfe der Formel

$$m = \frac{\text{Schrittzahl aller Chips}}{\text{Anzahl der Chips in den absorbierenden Zuständen}}.$$

Diese Definition wird erzwungen durch die Häufigkeitsdeutung der WT. Es ist die mittlere Schrittzahl, die ein Chip bis zur Absorption benötigt. In der Tat: Jeder Schüler der Klasse zeichnet den Graphen und schickt einen Chip mehrmals durch den Graphen, gesteuert von einem Zufallsgerät. Die mittlere Schrittzahl wird nach der oben genannten Formel berechnet und liefert eine Näherung für den exakten Wert. Der exakte Wert ergibt sich bei einem Umlauf des Zyklus.

Es gibt nur $\prod_{i=1}^n (c_i + 1)$ mögliche blockierende Graphen, wo n die Anzahl der inneren Zustände ist und c_i die kritische Zahl des i -ten Zustands. Der Zyklus enthält in der Regel nur eine Teilmenge der möglichen blockierenden Graphen.

3. Beispiel. Das kühne Spiel



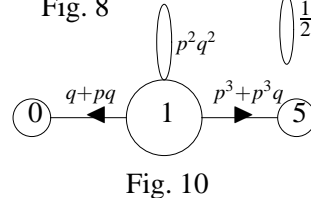
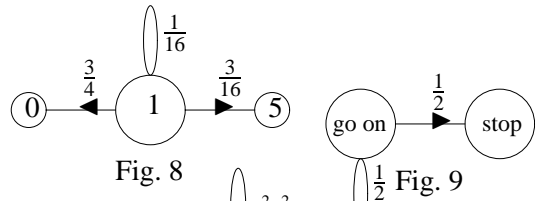
Ein Spieler hat 1 Dollar, aber die Fahrt nach Hause kostet 5 Dollar. Neben der Haltestelle steht ein Casino mit der Reklame: **Wir sind das einzige faire Casino von Las Vegas.** Er beschließt sein Glück zu versuchen mit der **Kühnen Strategie.** D.h., in jedem Schritt setzt er soviel von seinem jetzigen Vermögen ein, dass er bei Gewinn möglichst nahe an sein Ziel kommt. Fig. 7 zeigt den Graphen des kühnen Spiels. Er startet mit dem Zustand 1. Er setzt alles ein. Bei Verlust hat er 0 und bei Gewinn geht er in den Zustand 2 über. Im Zustand 2 setzt er wieder sein ganzes Vermögen ein und bei Gewinn kommt er zum Zustand 4. Im Zustand 4 setzt er nur einen Dollar ein. Bei Gewinn hat er sein Ziel erreicht und bei Verlust fällt er auf den Zustand 3 zurück. In 3 setzt er 2 Dollar ein. Bei Gewinn hat er sein Ziel erreicht und bei Verlust fällt er auf seinen Ausgangszustand 1 zurück.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen und wie lange dauert das Spiel im Mittel?

Wir laden den Graphen kritisch, indem wir die Zustände 2, 3, 4 mit je einem Chip laden. Nach 30 Schritten ist das Spiel zu Ende. Schließlich liegen in 0 zwölf Chips und in 5 drei Chips. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen und die mittlere Schrittzahl sind jeweils $P_5 = 3/15 = 1/5$, $m = 30/15 = 2$. Wir können die Aufgabe wesentlich vereinfachen durch Zusammenlegen von Zuständen. Wir können direkt verlieren mit W. $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ oder direkt gewinnen mit W. $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Alle anderen Pfade enthalten einen Zyklus und führen mit W. $\frac{1}{16}$ nach 1 zurück. Dies liefert den einfachen Graphen in Fig. 8. Er enthält nur drei Zustände: 0, 1, 5. Wir starten mit 16 Chips in 1. Davon gehen zwölf nach 0, drei nach 5 und ein Chip kommt nach 1 zurück. Es gibt keine inneren Zustände, nur den Start und die beiden absorbierenden Zustände 0 und 5. Also sind die Wahrscheinlichkeiten von 5 und 0 jeweils $3/15 = 1/5$ und $12/15 = 4/5$.

Für den Erwartungswert der Spieldauer können wir die Zustände weiter zusammenlegen. Es gibt nur noch zwei Zustände GO ON und STOP, wie Fig. 9 zeigt. Wir starten mit zwei Chips. Ein Chip geht nach STOP und der andere kehrt nach GO ON zurück. Wir

benötigen zwei Chips, um einen Chip nach STOP zu bewegen. Also ist die mittlere Spieldauer (Schrittzahl) $m = 2$.

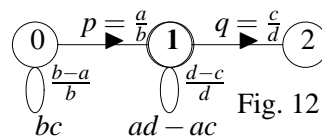
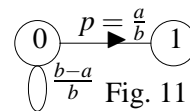


Es gibt kein faires Casino. Bei jedem Casino ist $p < q$. Dann erhalten wir den Graphen in Fig. 10. Für die W. P_5 irgend einmal von 1 nach 5 zu gelangen, gilt

$$P_5 = p^3 + p^3q + p^2q^2p_5 \implies P_5 = \frac{p^3 + p^3q}{1 - p^2q^2}$$

Bei einem wirklichen Casino ist die kühne Strategie eine günstigste Strategie. Die ängstliche Strategie, jedesmal einen Dollar setzen (Minimaleinsatz) ist die schlechteste Strategie. Durch Einsetzen verschiedener Werte für p kann man dies bestätigen. Für $p = \frac{1}{2}$ sind alle Strategien gleich gut.

4. Beispiel. Schleifen Verzögerung.



Die Übergangswahrscheinlichkeit von 0 nach 1 in Fig. 11 sei $p = \frac{a}{b}$, wo a und b natürliche Zahlen sind, $a \leq b$. Wir starten mit b Chips in 0. Dann gehen a Chips nach 1 und $b - a$ Chips durchqueren die Schleife und kehren nach 0 zurück. D.h., alle Chips machen b Schritte um a Chips nach 1 zu bringen. M.a.W., die mittlere Schrittzahl (pro Chip) ist $\frac{b}{a}$, oder $\frac{1}{p}$, der Kehrwert von p . Dies ist die *Schleifen Verzögerung*. Schleifen Verzögerungen addieren sich. In der Tat: Betrachte die beiden Schleifen in Fig. 12. Die erwartete Schrittzahl, um von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 2 zu gelangen ist jeweils $1/p = b/a$ und $1/q = d/c$. Um von 0 nach 2 zu gelangen braucht man im Mittel

$$m = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Wir wollen dieses offensichtliche Ergebnis auch mit Chips beweisen. In Fig. 12 wird der Zustand 1 mit $ad - ac$ Chips vorgeladen und wir starten mit bc Chips in 0. Dann gehen ac Chips nach 1. In 1 sind nun ad Chips. Wir ziehen ac Chips von 1 nach 2 und der Zustand $ad - ac$ Chips im inneren Zustand 1 ist wieder hergestellt. Die Chips haben insgesamt $bc + ad$ Schritte gemacht um ac Chips nach 2 zu bringen. Daher ist

$$m_{02} = \frac{bc + ad}{ac} = \frac{b}{a} + \frac{d}{c}.$$

Nun betrachten wir folgendes Problem: *Ein guter Würfel wird gerollt, bis alle sechs Augenzahlen erschienen sind. Welches ist die erwartete Anzahl von Wiederholungen?*

Drei Versuche ergaben die Wortlängen 14, 11, 14 mit der mittleren Wortlänge 13:

66261256112364, 52525246123, 33623433362651

Dieser Versuch wird oft wiederholt. Welche Wortlänge ist im Mittel zu erwarten? Dies ist ein Beispiel des *Gutschein Sammel-Problems*, englisch **Coupon Collector's Problem**.

Fig. 13 zeigt den Graphen des Experiments. Nach dem Additionssatz für Schleifen Verzögerungen gilt

$$m_6 = \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14.7$$

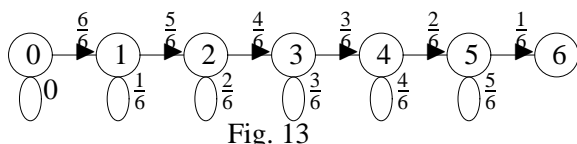


Fig. 13

Analog gilt für den Erwartungswert eines vollständigen Satzes dezimaler Zufallsziffern:

$$m_{10} = 10 \left(\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} \right) = 29.29.$$

Wir betrachten die Wartezeiten für einen vollständigen Satz eines Glücksrads mit den Ausfällen $\{1, 2, \dots, n\}$ und gleichen Wahrscheinlichkeiten. Wir zeichnen eine Figur analog zu Fig. 13 für ein beliebiges n . Wir sind im Zustand i , wenn wir i verschiedene Ausfälle gesammelt haben. Sei X_i die Wartezeit, um vom Zustand $i - 1$ nach i zu gelangen. Dann gilt

$$p_i = \frac{n - i + 1}{n}, \quad E(X_i) = \frac{n}{n - i + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Die Summe $T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ist die Wartezeit für einen vollständigen Satz. Daher ist

$$a_n = E(T_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - i + 1},$$

$$a_n = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Man benötigt im Mittel $a_{365} = 2364$ Personen, um jeden Geburtstag zu sammeln.

5. Beispiel. Stoppregeln für die Familienplanung

Wir betrachten Stoppregeln für die Familienplanung und für jede Regel finden wir die erwartete Familiengröße. Die Wahrscheinlichkeiten einer männlichen bzw. weiblichen Geburt sei p bzw. q .

I. Stopp mit dem ersten Jungen. Sei m die mittlere Kinderzahl. Für $p = q$ können wir Chips verwenden, für $p \neq q$ die Formel für die Schleifen Verzögerung. Im ersten Fall erhalten wir $m = 2$ und im zweiten $m = \frac{1}{p}$. Siehe Fig. 14.

II. Stopp mit beiden Geschlechtern. In Fig. 15 sei $p = q$. Wir laden die beiden inneren Zustände kritisch mit je einem Chip und starten mit zwei Chips. In 6 Schritten laufen zwei Chips zum Endzustand und der kritische Zustand kehrt wieder. Daher ist $m = 6/2 = 3$. Für $p \neq q$ erhalten wir

$$m = p \left(1 + \frac{1}{q} \right) + q \left(1 + \frac{1}{p} \right) \implies m = 1 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

Für $p \neq q$ ist $m > 3$ (arithmetisch-geometrisches Mittel).

III. Stopp mit beiden Geschlechtern, aber mehr als zwei. Siehe Fig. 16. Für $p = q$ laden wir die Zustände 0, 1, 00, 11 mit je einem Chip und spielen, bis die kritische Ladung wiederkehrt. Nach 14 Schritten kehrt die kritische Ladung wieder und 4 Chips gelangen in den Endzustand. Also ist $m = 14/4 = 3.5$. Die allgemeine Formel hat viele Gestalten. Zunächst erhalten wir

$$m = 6pq + q^2 \left(2 + \frac{1}{p} \right) + p^2 \left(2 + \frac{1}{q} \right).$$

Unter Verwendung von $p^3 + q^3 = (p + q)(p^2 - pq + q^2) = p^2 - pq + q^2 = (p + q)^2 - 3pq = 1 - 3pq$ erhalten wir nach einigen Reduktionen

$$m = 2pq + \frac{1}{pq} - 1.$$

IV. Stopp mit zwei abgeschlossenen Serien. Fig. 17 ist selbst erklärend. Sie erklärt auch den Begriff „abgeschlossene Serie“. Nach der kritischen Ladung der

4 inneren Zustände erhalten wir $m = 5$. Die allgemeine Lösung lautet

$$m = q \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + p \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right),$$

oder $m = 3 + \frac{q}{p} + \frac{p}{q}$. Für $p \neq q$ ist $m > 5$.

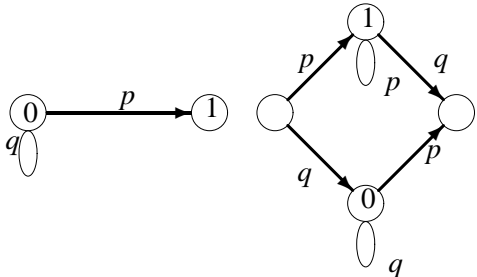


Fig. 14

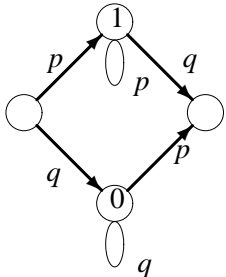


Fig. 15

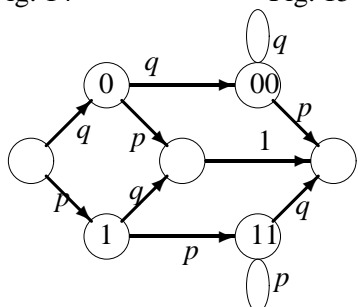


Fig. 16

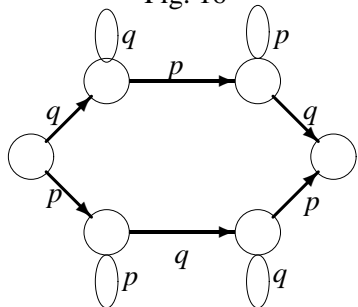


Fig. 17

V. Warten auf ein Palindrom. Ein Palindrom ist ein Wort, das vorwärts und rückwärts gleich gelesen wird. Wörter aus einem Zeichen sind keine Palindrome. Ein Paar stoppe, sobald ein Palindrom erscheint. Sei zuerst $p = q$. In Fig. 18 bedeutet b^* irgend eine Anzahl von b einschließlich gar kein b .

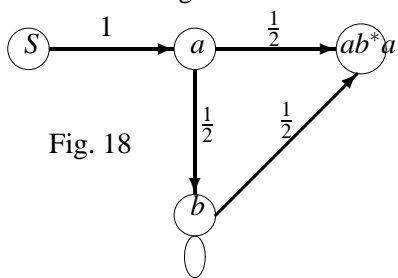


Fig. 18

Fig. 18 liefert mit Chips $m = 3$. Nun sei $p \neq q$. Fig. 19 liefert

$$m = 2p^2 + 2q^2 + pq \left(2 + \frac{1}{p} \right) + qp \left(2 + \frac{1}{q} \right) \Rightarrow m = 3.$$

Überraschenderweise ist die mittlere Kinderzahl unabhängig von p .

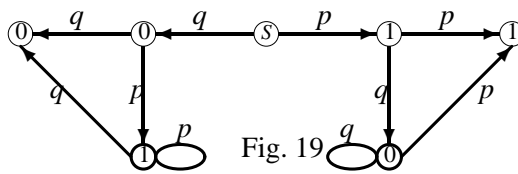


Fig. 19

VI. Stoppe mit zwei Geschlechtern, aber höchstens mit 4 Kindern. Sei $p = q$. Wir laden die Zustände 1, 11, 0, 00 kritisch mit je einem Chip und starten mit zwei Chips. Nach 22 Schritten gelangen 8 Chips zum Stoppe. Die mittlere Schrittzahl ist $m = 22/8 = 3.75$. Für $p \neq q$ ist nach Fig. 20

$$m = 2pq + 2qp + 3q^2p + 3p^2q + 4(p^3 + q^3).$$

Nach einigen Vereinfachungen erhält man schließlich $m = 4 - 5pq$.

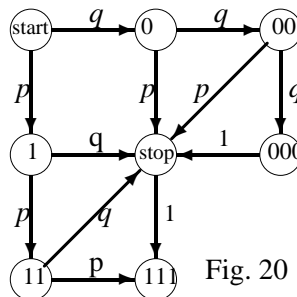


Fig. 20

6. Beispiel. Das Ehrenfest Modell für Diffusion

Wir betrachten eine einfache Version des Ehrenfest Modells für Diffusion. Ein Behälter ist durch eine Wand mit einem kleinen Loch getrennt. Links befinden sich 4 Moleküle, die durch kleine Kreise angedeutet sind. Sie bewegen sich zufällig mit der Geschwindigkeit einer Gewehrpatrone. Die 5 großen Kreise in Fig. 21 sind die 5 Zustände des Systems. Die Brüche an den Pfeilen sind die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge zwischen Nachbarzuständen. Die Zustandsnummer ist einfach die Anzahl der Moleküle in der rechten Seite eines Behälters. Ein typischer Ablauf des Systems könnte sein: 01232 12101 23234 34323 23434...

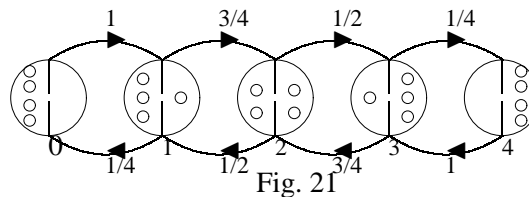


Fig. 21

In Stochastik Büchern werden folgende typische Probleme gelöst:

1. Die mittlere Zeit um von 0 nach 0 zu gelangen.

2. Die Wahrscheinlichkeit nach 0 zurückzukehren, ehe man nach 4 gelangt.
3. Die mittlere Zeit um von 0 nach 4 zu gelangen.
4. Die mittlere Anzahl von Besuchen eines jeden Zustands.
5. Die relative Häufigkeit einer jeden Ziffer in einer langen Serie von Ziffern.
6. Die mittlere Wartezeit auf das Wort 01234.
7. Die Verteilung der Wartezeiten bis zum Stopp für irgendeine der vorangehenden Probleme. Dieses Problem wird auf der Oberstufe gelöst, da es auf Rekursionen führt.

1. Die mittlere Rückkehrzeit nach 0.

Wir wollen die mittlere Rückkehrzeit des Zustands 0 bestimmen. Spielen mit Chips, bis die kritische Ladung wiederkehrt, liefert $m = 16$ Schritte. Die Fluss Interpretation liefert $m = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$. In der Tat: Jeder Chip von einem Zustand macht einen Schritt. Die Addition der Schrittzahlen liefert $m = 16 = 2^4$ Schritte. In Fig. 22 wollen wir die Pascal-Zahlen 1, 4, 6, 4, 1 rekonstruieren. Eingabe ist die Masse 1. Nach Rückkehr der kritischen Ladung ist die Eingabe 1 verschwunden und erscheint im absorbierenden Zustand 0_a wieder. Dies ist $1/4$ von 4. Von 4 fließt die Masse 3 zum nächsten horizontalen Zustand. Genauso viel fließt auf dem entsprechenden unteren Zweig zurück, da rechts davon keine absorbierenden Zustände sind. Die 3 ist $1/2$ von 6. D.h., durch den dritten horizontalen Zustand fließt die Masse 6. Analog kann man die Flüsse durch die übrigen Zweige und Zustände rekonstruieren. Genauso rekonstruiert man die Pascal-Zahlen 1, 5, 10, 10, 5, 1 mit der Summe 2^5 in Fig. 23. Man vermutet, dass für $n = 1000$ Moleküle die mittlere Rückkehrzeit 2^{1000} sein wird. Aber $2^{10} > 10^3$. Daher ist $2^{1000} > 10^{300}$. D.h., wir werden bei $n = 1000$ nie eine Rückkehr beobachten.

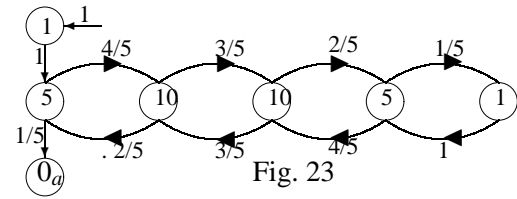
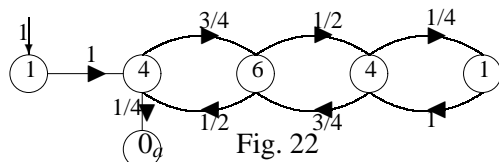


Fig. 23

2. Die Wahrscheinlichkeit nach 0 zurückzukommen, ehe man 4 erreicht.

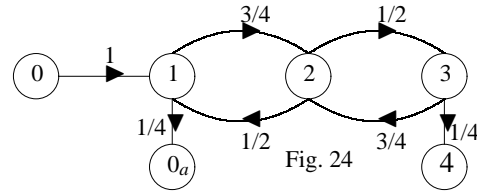


Fig. 24

Fig. 24 gehört zu diesem Problem. Hier ist der Zustand 0 in 0 und 0_a aufgespalten. Der Zustand 0_a ist absorbierend. In der Tat: Wir können nicht nach 0 zurückkehren, da kein Pfeil dorthin führt. Spielt man mit Chips auf Fig. 24, so benötigt man 64 Schritte bis zur Rückkehr der kritischen Ladung, wobei 5 Chips nach 0_a gelangen und 3 Chips in 4 absorbiert werden. Die Wahrscheinlichkeiten, in 0_a und 4 absorbiert zu werden, sind jeweils $5/8$ und $3/8$. Die mittlere Schrittzahl bis zum Ende ist $64/8=8$.

3. Die mittlere Zeit, um von 0 nach 4 zu gelangen.

Zu diesem Problem gehört der Graph in Fig. 25. Hier ist der Zustand 4 der einzige absorbierende Zustand. Spiel mit Chips zeigt, dass 3 Chips durchmarschieren und 64 Schritte brauchen. Die mittlere Dauer um von 0 nach 4 zu gelangen ist $m = 64/3 = 21\frac{1}{3}$.

Wir können diese Zahl ohne zu spielen bekommen durch Rekonstruktion des Flußes. Chips von der Masse 1 werden im Zustand 0 eingegeben und durch den Graphen gepumpt. Am Spielende kommen sie im Zustand 4 an. Beginnend am Ende können wir den ganzen Fluss rekonstruieren. Wenn die Masse 1 im Zustand 4 ankommt, so fließt durch den Zustand 3 die Masse 4. Dann fließt die Masse 8 durch den Zustand 2. Von der Masse 8 im Zustand 2 kommt die Masse 3 vom Zustand 3. Die Restmasse 5 muss dann vom Zustand 1 kommen. D.h., die Masse $\frac{4}{3} \cdot 5 = \frac{20}{3}$ fließt durch den Zustand 1. Durch den Zustand 0 fließen dann $\frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$. Schließlich ist $m = \frac{8}{3} + \frac{20}{3} + 8 + 4 = 21\frac{1}{3}$.

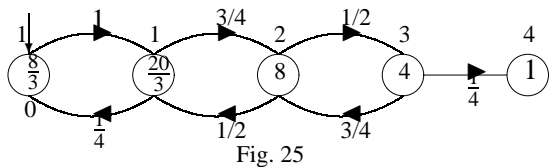


Fig. 25

4. **Mittlere Anzahl von Besuchen eines jeden Zustands.**

Hier haben wir eine vollkommen neue Situation. Der Graph ist auch ganz anders. Es gibt keine absorbierenden Zustände, so dass das Spiel nie endet. Hier handelt es sich um eine ergodische Markow-Kette.

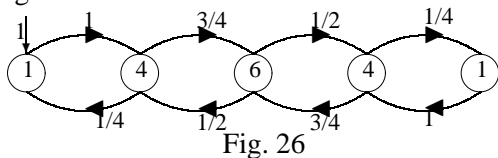


Fig. 26

Hier müssen wir ganz anders vorgehen. Zuerst laden wir jeden Zustand so, dass man von jedem Zustand gerade noch ziehen kann. Man erhält die Ladung (1,4,2,4,1). Ein **simultaner Zug** von jedem Zustand führt zu (1,2,6,2,1). Nun wird jeder Zustand abermals geladen, dass ein Zug gerade möglich wird: (1,4,6,4,1). Ein weiterer Zug ändert den Vektor (1,4,6,4,1) nicht. Wir haben einen **Fixvektor**, dessen Komponenten die Verteilung der Häufigkeiten der einzelnen Zustände angeben. Der Beweis dieser (nicht trivialen) Tatsache sei dem Leser überlassen.

5. **Die relative Häufigkeit jeder Ziffer in einer langen Serie.**

Das Problem wurde schon durch das vorangehende Problem gelöst. Die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ziffern betragen

$$1 : 4 : 6 : 4 : 1.$$

6. **Die mittlere Schrittzahl, bis das Muster 01234 erscheint.**

Dies ist eine ganz schwere Aufgabe. In Fig. 27 müssen wir die Ziffern 01234 monoton durchlaufen. Sobald die Monotonie in den Zuständen 2 oder 3 unterbrochen wird, ist 4 nicht mehr absorbierender Zustand. Man wird zu den oberen Zuständen 1', 2', 3', 4' geleitet und macht eine Irrfahrt auf dem oberen Teil des Graphen, bis man über den Zweig 1'0 wieder auf den unteren Zweig gelangt. So wird ein monotoner Durchmarsch 01234 erreicht. Fig.

28 zeigt die Rekonstruktion des Flusses auf dem Graphen ausgehend vom absorbierenden Zustand, in dem die Masse 1 ankommt.

Nun ist

$$m = \frac{32}{3} + \frac{32}{3} + 8 + 4 + 28 + 48 + 32 + 8 = 149\frac{1}{3}$$

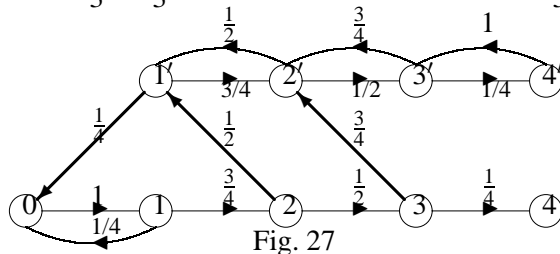


Fig. 27

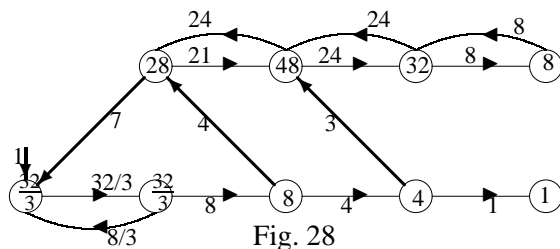


Fig. 28

7. **Beispiel. Ein Spiel**

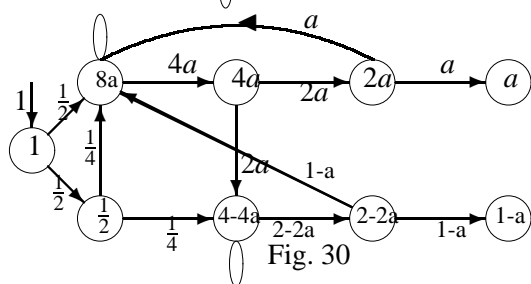
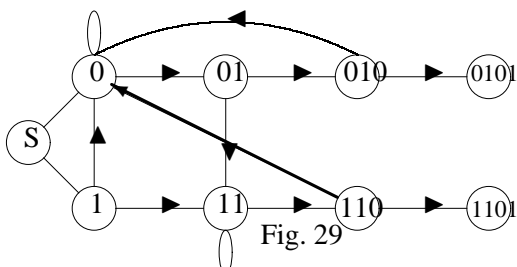
Abel und Kain vereinbaren folgendes Spiel: Eine gute Münze wird geworfen, bis eines der Wörter 0101 oder 1101 erscheint. Im ersten Fall gewinnt Abel, sonst Kain. Bestimme die Gewinnwahrscheinlichkeiten für Abel und Kain. Wie groß ist die mittlere Spieldauer? Fig. 29 zeigt den Ablauf des Spiels. Mit Chips lassen sich die gesuchten Zahlen bestimmen. Aber man braucht übermäßig viel Zeit, um zum Ziel zu kommen. Nach 176 Schritten kehrt die kritische Ladung wieder. Dabei werden 7 Chips in 0101 und 9 Chips in 1101 ankommen. Die Wahrscheinlichkeiten für Abel und Kain sind daher $p_a = 7/16$, $p_k = 9/16$. Die mittlere Schrittzahl ist $m = 176/16 = 11$. Aber die aufgewendete Zeit ist beträchtlich. Es ist jedoch leicht durch Rekonstruktion des Massenflusses durch den Graphen in wenigen Minuten zum Ziel zu gelangen.

Fig. 30 zeigt den Fluss entlang der Kanten und den Fluss durch die einzelnen Zustände. An den Kanten stehen keine Wahrscheinlichkeiten, sondern Flüsse. In den beiden Endzuständen erscheinen die Massen a und $1 - a$. Ausgehend von a und $1 - a$ können wir alle anderen Flüsse durch Zweige und Zustände rekonstruieren. Wir achten auf den linken oberen Schleifenzustand. Für ihn gilt Netto Zufluss = Netto Abfluss. Der Netto Zufluss ist $a + 1 - a + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ und der Netto Abfluss $4a$. Also gilt die Gleichung

$$4a = \frac{3}{4} + a + 1 - a \implies a = \frac{7}{16}, \quad 1 - a = \frac{9}{16}.$$

Um die erwartete Schrittzahl zu bekommen, müssen wir alle Zahlen im Start und in den inneren Zuständen addieren:

$$1 + 8a + 6 + \frac{1}{2} = 7 + 8a + \frac{1}{2} = 7 + \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 11.$$



8. Beispiel. Die Volltour eines Hexagons

Ein Laplace-Käfer wandert auf den Ecken bzw. Seiten eines gleichseitigen Sechsecks. Für eine Seite benötige er eine Minute. Wie viele Minuten braucht er im Mittel, um alle Ecken bzw. Seiten zu besuchen?

Dies ist eine nicht triviale Aufgabe. Erst durch passende Zusammenlegung von Zuständen gelingt es, eine einfache Lösung zu finden. Bei mehreren aufeinander folgenden schon besuchten Ecken ist es gleichgültig, ob der Käfer am rechten oder linken Ende sitzt. Daher nehmen wir an, dass er immer rechts sitzt. Hat der Käfer ungerade viele Ecken besucht und sitzt er in der Mitte, so ist es gleichgültig, ob er von dort nach links oder rechts geht. Wir nehmen an, dass er immer nach rechts geht. Bei einer geraden Anzahl besuchter Ecken gibt es zwei mittlere. Sitzt der Käfer auf der rechten dieser Ecken, so nehmen wir an, dass er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in der Ecke verweilt, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach rechts geht. Die beiden folgenden Graphen sind unter diesen Bedingungen gezeichnet, die erste für die Ecken, die zweite für die Seiten. So wird eine maximale Zusammenlegung von Zuständen erzielt.

Die Graphen werden kritisch geladen. Nach Eingabe von einem Chip wandert dieser in 12 bzw. 15 Sekunden durch. Die Ergebnisse sind jeweils 15 bzw. 21 Schritte. Dies sind zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen $\binom{6}{2}$ bzw. $\binom{7}{2}$. Man vermutet, dass für ein gleichseitiges n -Eck die entsprechenden Ergebnisse $\binom{n}{2}$ und $\binom{n+1}{2}$ sein werden. In der Tat: Ersetzt man

in Fig. 32 den Endzustand 1 durch 7, so erhält man genau den Graphen der Irrfahrt auf den Ecken eines gleichseitigen 7-Ecks. Nun bestätigt man die Vermutung für $n = 2, 3, 4, 5$, da die entsprechenden Graphen Teilgraphen der schon gezeichneten Graphen sind. Auf der gymnasialen Oberstufe könnte man den allgemeinen Satz beweisen.

Nach diesen Vorbereitungen erfolgt die systematische Behandlung der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie mit dem SA. Sie beruht im Wesentlichen auf der folgenden Tatsache:

Wir starten mit dem kritischen Zustand. Für jeden inneren Zustand gilt dann: Bei Wiederkehr der kritischen Ladung ist der Netto Zufluss von Chips gleich dem Netto Abfluss.

Bei noch größeren Problemen führt dieser Zugang zu vielen linearen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten. Aber dem Schüler steht *Derive* zur Verfügung. Dieses CAS-System hat einen simulanten Gleichungslöser, der alle Probleme mühelos erledigt.

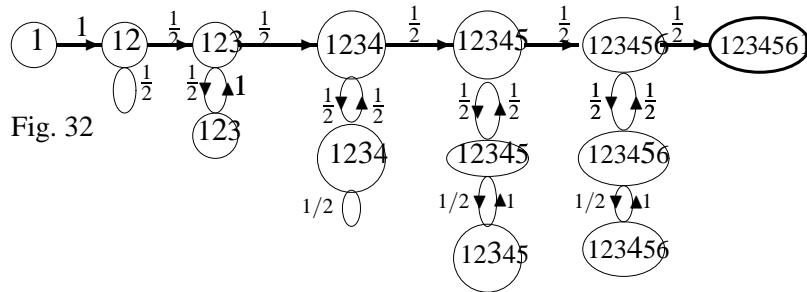
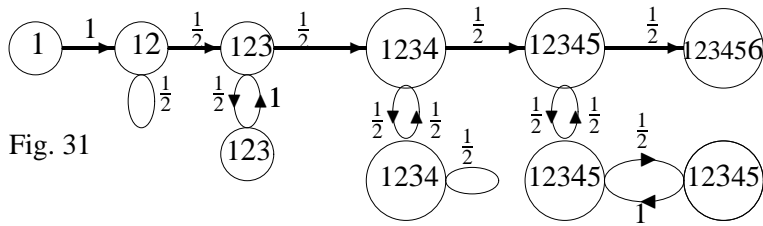
Zur Geschichte. Den SA habe ich 1974 entdeckt beim Unterricht mit 10-jährigen Kindern. Die Ergebnisse wurden 1975 und 1976 in Engel (1975a) und Engel (1976a) publiziert. Gleichzeitig erschien die deutsche Übersetzung von Engel (1975a) in Engel (1975b).

1975 fand im Banach Zentrum (Warschau) eine Konferenz zur Didaktik der WT statt, zu der ich eingeladen wurde. Ich habe den SA vorgestellt. Es folgte eine vehemente Kritik von G. Papy (ein Skandal, es wird etwas noch nicht Bewiesenes für die Schule vorgeschlagen). In der Tat bin ich nie auf die Idee gekommen, dass die Theorie nicht richtig sein könnte. In der folgenden Nacht gelangen mir alle Beweise, bis auf meine Vermutung über die *Wiederkehr der kritischen Ladung*.

Am nächsten Tag berichtete ich, dass mir der Beweis gelang. Freudenthal, der damalige Herausgeber der *Educational Studies in Mathematics* war auch anwesend und versprach den neuen Artikel schnell zu publizieren. Dies war der Ursprung meiner Arbeit Engel (1976a). Sie wurde nie ins Deutsche übersetzt.

Die nächste Arbeit zum SA erschien 1986 in Spencer (1986). Danach bekam der SA den Namen *Chip Firing Games on Graphs*. Es folgte in rascher Folge eine umfangreiche Serie von Arbeiten mit weitgehenden Verallgemeinerungen, die zum größten Teil für die WT irrelevant sind.

Eine umfassende Darstellung des Themas erschien 1992 in Björner/Lovász (1992). Darin wird im letzten Abschnitt auf den SA eingegangen, in Anlehnung an die Arbeit Engel (1976a). Dort findet man auch den ersten *publizierten* Beweis der Vermutung über die *Wiederkehr der kritischen Ladung*. Er stammt von L. Lovász, einem der produktivsten lebenden Mathematiker, Träger des Wolf-Preises.



Literatur

- Björner, A.; Lovász, L. (1992): Chip Firing Games on Directed Graphs. In: Journal of Algebraic Combinatorics 1, 305–328.
- Engel, A. (1975a): The Probabilistic Abacus. In: Educational Studies in Mathematics 6, 1–22.
- Engel, A. (1975b): Der Wahrscheinlichkeitsabakus. In: MU, Heft 2, 70–94. Leicht lesbar im Gegensatz zum vorliegenden Artikel.
- Engel, A. (1976a): Why Does the Probabilistic Abacus Work? In: Educational Studies in Mathematics 7, 59–69.
- Engel, A. (1976b): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd. 2. Stuttgart: Klett, 212–216.

- Spencer, J. (1986): Balancing Vectors in the Max Norm. Combinatorica 6, S. 55-66.
- Huyghens, Ch. (1657): De Ratiociniis in Ludo Aleae. In: Gesammelte Werke, Band 14.
- Cardano, G. (1663): in Opera omnia, t. I.
- Engel, A.: The Stochastic Abacus: A New Approach to Discrete Probability, ca. 179 Seiten. In Vorbereitung.

Anschrift des Verfassers

Prof. Arthur Engel

Am Treutengraben 49

D-60488 Frankfurt a.M.

aengel@math.uni-frankfurt.de