Die Untersuchung des Problems der vertauschten Briefe im Unterricht anhand von Quellentexten

PETER RASFELD, BIELEFELD

Zusammenfassung: *In Ergänzung zum Beitrag von Hendrik Kratz zum Problem der vertauschten Briefe in Heft 1 von Stochastik in der Schule des vergangenen Jahres soll hier eine weitere Möglichkeit zur Behandlung im Mathematikunterricht vorgestellt werden, die sich auch außerhalb von Leistungskursen anbietet.*

1 Einführung

In seinem o.a. Beitrag schildert Hendrik Kratz, wie Schüler[1] seines Leistungskurses (Jahrgangsstufe 12) Lösungen zum Problem der vertauschten Briefe weitgehend selbständig in Gruppenarbeit gefunden haben. Nachdem die Lernenden zunächst daran scheiterten, einen „direkten“ Weg zur Bestimmung eines Terms für die Anzahl A_n der fixpunktfreien Permutationen der Länge n zu entwickeln und Tipps zur Anwendung der Siebformel wegen der Komplexität dieses Ansatzes wenig hilfreich erschienen, erhielten sie vom Lehrenden als „strategische Hilfe“ den Hinweis, eine Rekursionsformel für A_n zu entwickeln. Eine solche Hilfestellung mag für mathematisch begabte Schüler eines Leistungskurses durchaus nützlich sein, doch bleibt die Frage, wie eine Behandlung des Sachverhalts für die übrigen Schüler der Oberstufe oder gar der Sekundarstufe I erfolgen könnte?

Nun sind die vertauschten Briefe nur eine von vielen Einkleidungen zum Rencontre-Problem. Untersuchungen zum Zusammentreffen zufälliger Ereignisse erscheinen aber auch für diese Lernenden nicht zuletzt deshalb notwendig und wünschenswert, da die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten im Alltag oftmals völlig falsch beurteilt werden. Ausdruck dafür sind Meldungen in den Medien, die regelmäßig als „sensationelle Zufälle“ präsentiert werden.

Ein schönes Bespiel, das gut zum Problem der vertauschten Briefe passt, findet man bei W. Krämer: „Abertausende amerikanische Kinder schreiben in diesen Monaten unbekannterweise Briefe an die im Persischen Golf eingesetzten US-Soldaten, um ihnen zu zeigen, dass man sie in der Heimat nicht vergessen hat. Die Anschrift lautet üblicherweise: $>$ An irgendeinen Soldaten $<$. Einen solchen Brief erhielt in Saudi-Arabien der 27-jährige Sergeant Rory Lomas aus Savannah im Staat Georgia. Wie es der Zufall wollte: Der Brief an irgendeinen Soldaten stammte von Lomas´ zehnjähriger Tochter Cetericka“ (aus der Hannoverschen Allgemeinen Zeitung, zit. nach Krämer (1998, S. 24).

Auch wenn W. Krämer die Wahrscheinlichkeit für eine solche Koinzidenz – unter starker Vereinfachung der realen Situation – wie im einfachen Problem der vertauschten Briefe zu rund 63,2% bestimmt, wird dennoch klar, dass von einem sensationellen Zufall keine Rede sein kann. Der Trugschluss, dem der Zeitungsredakteur und vermutlich viele seiner Leser unterlief, besteht meist darin, anstelle der Wahrscheinlichkeit, dass irgendeiner der Soldaten den Brief seines eigenen Kindes erhält, diejenige zu betrachten, mit der dies einem bestimmten Soldaten (eben gerade diesem Sergeant Rory Lomas) widerfährt. Mag die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis auch recht klein sein, so trifft dies für das in Frage kommende Ereignis nicht zu, da es sich hier, wie N. Henze (1997, S. 77) es einmal formuliert hat, um die Vereinigung vieler unwahrscheinlicher Ereignisse handelt.

Eine Möglichkeit, Lernende an das Rencontre-Problem heranzuführen, könnte darin bestehen, sie anhand von geeigneten Textmaterialien den historischen Prozess der Lösungsfindung *nachvollziehen* zu lassen. Bevor dies im Einzelnen dargestellt wird, soll zunächst kurz auf die Geschichte des Problems eingegangen werden.

2 Zur Geschichte des Rencontre-Problems und erste Zugänge im Unterricht

Das Problem der vertauschten Briefe mag, wie H. Kratz in seinem Beitrag auf S. 15 ausführt, keinen realistischen Anwendungskontext besitzen[2] , seinem Ursprung nach besitzt es aber einen „handfesten“ Hintergrund. Informationen hierzu findet man z.B. bei Takács (1989) oder Hald (1990, S. 326 – 346).

[1] Allein der Kürze wegen wird nur der männliche Sprachgebrauch verwendet.

[2] Interessanterweise wurde von Lambert, auf den die Idee der vertauschten Briefe zurückgeht, vorgeschlagen (ohne allerdings dies jemals näher zu untersuchen), das Rencontre-Problem und seinen Lösungsansatz zur Prüfung der Zuverlässigkeit von Wettervorhersagen anzuwenden (vgl. Hald (1990, S. 341)).

Das Problem geht zurück auf eine Untersuchung des sog. „*Jeu du Treize*“ durch Pierre Rémond de Montmort (1678 - 1719) im Jahre 1708 (vgl. auch Montmort (1713, S 130–143). In seiner einfachsten Form besteht es aus 13 Karten mit Werten von 1 bis 13, die nach dem Mischen nacheinander von einem Bankhalter aufgedeckt werden. Stimmt kein Kartenwert mit seiner Ziehungsnummer überein, gewinnt der Spieler, anderenfalls die Bank. In der Praxis wurden 4 Kartensätze (4 Farben) mit je 13 der genannten Karten verwendet.

Für den Einstieg in die Rencontre-Problematik im Unterricht würde sich anbieten, das Treize-Spiel (in seiner einfachen Form) wirklich mehrfach durchzuführen, um erste Erfahrungen darüber zu sammeln, ob es für den Bankhalter oder Spieler vorteilhafter ist. Bei einer genügenden Anzahl von Spielen wird sich wohl die Vermutung einstellen, dass der Spieler gegenüber der Bank im Nachteil ist, was tatsächlich der Fall ist und im Übrigen auch für das übliche Treize-Spiel mit 4 Kartensätzen gilt.[3]

Um diese Vermutung weiter zu prüfen, bietet sich die Verwendung einer Computersimulation an, mit der rasch eine große Zahl an Spielen durchgeführt werden kann. Abb. 1 zeigt einen Ausschnitt einer solchen Simulation von 100 Spielen unter Verwendung von Excel nach einer Idee von Klaus Strick.[4] In den Spalten A bis D (Abb. 1) werden jeweils vier Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt [5].

Hilfreich im Unterricht erscheint hier wie auch bei den verschiedenen Einkleidungen des Rencontre-Problems die Betrachtung des Vorgangs aus der Perspektive eines Teilchen/Fächer-Modells, wodurch die Analogien offenbar werden: Die vier zufällig erzeugten Zahlen werden jeweils nacheinander auf vier von 1 bis 4 (oder hier A bis D) durchnummerierte Fächer verteilt. Anschließend wird geprüft, ob dabei wenigstens eine der Zufallszahlen gemäß ihrer Rangposition in dem entsprechenden Fach gelandet ist. In der ersten Datenzeile der Tabelle in Abb. 1 sind z.B. 0,103 und 0,664 als zweit- bzw. drittgrößte Zufallszahl richtig im zweiten bzw. dritten Fach eingeordnet worden.

Diese Überprüfung erfolgt in dem Programm, indem mit Hilfe des Befehls „kkleinste(...)“ die vier Zufallszahlen zunächst in den Spalten F bis I der Größe nach sortiert werden. In den Spalten K bis N wird dann durch Vergleich jeweils festgestellt und mit Hilfe der Kodierungen 1 bzw. 0 notiert, ob eine Zufallszahl ihre Position beibehalten hat oder nicht, entsprechend in der Spalte P, ob wenigstens eine der vier Zufallszahlen fix geblieben ist. Durch Drücken der Funktionstaste F9 wird jeweils eine komplett neue Tafel mit Zufallszahlen berechnet, so dass sich unmittelbar beobachten lässt, wie sich die relative Häufigkeit für wenigstens eine Koinzidenz verändert.Dabei zeigt sich, dass die relativen Häufigkeiten zwar durchweg größer als 0,5 sind, aber natürlich gewissen Schwankungen unterliegen. Dies gilt auch, wenn man anstel-

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
0,818	0,103	0,664	0,020		0,020	0,103	0,664	0,818		0	1	1	0		1
0,280	0,806	0,317	0,385		0,280	0,317	0,385	0,806		1	0	0	0		1
0,724	0,130	0,593	0,318		0,130	0,318	0,593	0,724		0	0	1	0		1
0,620	0,014	0,274	0,289		0,014	0,274	0,289	0,620		0	0	0	0		0
0,264	0,608	0,930	0,662		0,264	0,608	0,662	0,930		1	1	0	0		1
0,336	0,082	0,312	0,580		0,082	0,312	0,336	0,580		0	0	0	1		1
0,317	0,142	0,444	0,573		0,142	0,317	0,444	0,573		0	0	1	1		1
0,855	0,237	0,828	0,571		0,237	0,571	0,828	0,855		0	0	1	0		1
						Anzahl Treffer bei 100 Versuchen									
						absolut:									69,00
						relativ:									0,69

Abb. 1 Ausschnitt einer Simulation des Recontre-Problems mit Hilfe von Excel

[3] Sei C_n das Ereignis für wenigstens einen Fixpunkt bei einer zufälligen Permutation der Länge n, so beträgt die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P(C_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r!}$, was für $n = 13$ näherungsweise 0,632 liefert. Bei s Möglichkeiten für jeden Fixpunkt ergibt sich $P(C_{n,s}) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} \cdot s^r \cdot \frac{(n \cdot s-r)!}{(n \cdot s)!}$, was im Treize-Spiel mit $n = 13$ und $s = 4$ etwa 0,643 ergibt.

[4] Siehe `http://www.landrat-lucas.de/`.

[5] Aus Platzgründen wird lediglich eine Tabelle mit 4 anstelle der 13 Zufallszahlen dargestellt.

le von vier Zufallszahlen drei oder mehr als vier wählt.

Nun liefern solche Simulatonen „nur" Näherungswerte für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, aber keine Einsicht in die Problemlösung. Im Unterricht wird sich damit zwanglos die Aufgabe stellen, die Wahrscheinlichkeiten für *wenigstens einen* bzw. *keinen Fixpunkt* bei Permutationen der Länge n zu *berechnen*.

Da es sich hier offensichtlich um ein Ereignis und sein Gegenereignis handelt, reicht die Berechnung einer der beiden Wahrscheinlichkeiten. Als Ansatz ergibt sich in beiden Fällen unmittelbar der Quotient aus der Anzahl der Permutationen mit wenigstens einem bzw. keinen Fixpunkt und der Anzahl aller Permutationen. Letztere beträgt $n!$, womit sich die Aufgabe auf die Bestimmung der ersten Anzahl reduziert.

Dies ist keineswegs einfach, wie man den Ausführungen Montmorts entnehmen kann. Er bestimmt zunächst die Wahrscheinlichkeiten für wenigstens eine Koinzidenz bei Verwendung eines Kartensatzes mit 2, 3, 4 und 5 Karten jeweils durch Betrachten aller Möglichkeiten. Bei 5 Karten mit Werten von 1 bis 5 gibt es z.B. $5! = 120$ Permutationen. Unter diesen befinden sich 24 Möglichkeiten, bei denen die 1 fix ist, 18 Permutationen mit 2 als Fixelement, ohne dass 1 fix ist, 14 Möglichkeiten mit 3 als Fixelement, ohne dass 1 oder 2 fix sind, 11 Permutationen mit 4 fix und 1, 2 oder 3 nicht fix sowie 9 Möglichkeiten mit 5 als Fixelement, ohne dass eines der anderen Elemente fix ist. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für wenigstens eine Koinzidenz zu

$$\frac{24+18+14+11+9}{120} = \frac{76}{120} = \frac{19}{30}.$$

Montmort gibt anschließend folgende Rekursionsfomel für die Wahrscheinlichkeit P_n für wenigstens einen Fixpunkt bei Permutationen der Länge n an:

$$P_n = \frac{(n-1)P_{n-1} + P_{n-2}}{n},\ n \geq 2,\ P_0 = 0,\ P_1 = 1.$$

Mit Hilfe dieser Rekursion bestimmt er die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn der Bank im vereinfachten Jeu du Treize (also bei einem Kartensatz mit 13 Werten) zu $P_{13} = \frac{109339663}{172972800} \approx 0,632.$[6]

Montmort konnte keinen Beweis für seine Formel liefern. Diesen wie auch die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für wenigstens eine bzw. keine Koinzidenz bei Verwendung von vier Kartensätzen fand Nikolaus Bernoulli, der mit Montmort zwischen 1710 und 1712 bezüglich des Rencontre-Problems einen Briefwechsel geführt hat, dessen Inhalt in der zweiten Ausgabe des o.a. Buches von Monmort aus dem Jahre 1713 abgedruckt ist.

Neben Montmort und Nikolaus Bernoulli haben sich zahlreiche weitere Mathematiker mit dem Problem der Koinzidenz auseinandergesetzt, unter ihnen de Moivre, Laplace und Euler. Der Text von Leonhard Euler (1707 -1783) aus dem Jahre 1779[7], in dem dieser die Lösung sehr ausführlich und relativ leicht verständlich entwickelt, scheint für den vorgeschlagenen Einsatz im Unterricht in besonderer Weise geeignet sein. Daher wird im Folgenden eine vollständige Übersetzung wiedergegeben [8].

3 Leonhard Euler: Die Lösung einer interessanten Frage aus der Lehre der Kombinatorik

1. Die Frage, die ich hier aufzurollen unternehme, soll so formuliert werden: Bei einer gegebenen Reihe von wie vielen Buchstaben a, b, c, d, e, etc. auch immer, deren Anzahl n sei zu finden, auf wie viele Arten die Ordnung dieser Buchstaben vertauscht werden kann, so dass kein Buchstabe an dem Platz gefunden wird, den er am Anfang eingenommen hatte.

Wenn die letzte Bedingung nicht beachtet wird und die Anzahl aller Permutationen überhaupt gesucht wird, ist hier sofort offensichtlich, dass diese $\langle$Anzahl$\rangle$ [9] das Produkt aller Zahlen von 1 bis n sein wird. Hier aber muss man alle Reihen ausschließen, in denen irgendein Buchstabe den Anfangsplatz einnehmen würde, wobei die Zahl aller Permutationen, die wir suchen, kleiner sein wird als $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

2. Um die Lösung dieser Frage aufzusuchen, wollen wir zuerst die einfachsten Fälle betrachten,

[6] Bemerkenswert ist, dass es relativ einfach ist zu zeigen, dass die Rekursion $A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2})$, die die Schüler von H. Kratz gefunden haben, und in der A_n die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen der Länge n ist, zu der von Montmort gefundenen Formel äquivalent ist: Sei B_n die Anzahl der Permutationen mit wenigstens einem Fixpunkt, so ist $P_n = \frac{B_n}{n!} = \frac{n!-A_n}{n!}$. Einsetzen des von den Schülern bestimmten Terms für A_n führt nach wenigen Umformungen zu der Formel von Montmort.

[7] Nachdruck aus dem Jahre 1923.

[8] Ich danke Herrn StD i.R. Gerd Eckel für seine unentbehrliche und tatkräftige Hilfe bei der Übersetzung aus dem Lateinischen.

[9] Ergänzungen werden in spitzen Klammern angegeben.

aus denen wir dann die Methode heraussuchen, die Lösung für eine welch große Anzahl an Buchstaben auch immer abzuleiten. Und zuerst jedenfalls ist evident, wenn man sich als einzigen Buchstaben a vornimmt, dass keine Variation [10] Platz haben kann. Wenn man aber zwei Buchstaben *ab* nimmt, gibt es nur eine einzige Variation, nämlich *ba*. Für drei Buchstaben *abc* aber kann es nur zwei Variationen geben, nämlich

$$bca, cab.$$

Aber wenn vier Buchstaben *abcd* gegeben sind, kommen hier drei Fälle zusammen, in denen entweder *b* oder *c* oder *d* den ersten Platz innehat; bei dem Fall also, in dem *b* an die erste Stelle gesetzt wird, lassen die übrigen <Buchstaben> drei Variationen zu, nämlich adc, dac, cda; auch ebenso viele Variationen werden wir haben, wenn so dem Buchstaben *c* wie auch *d* der erste Platz zugeteilt wird, und so können im Ganzen neun Variationen ihren Platz finden, nämlich:

$$\begin{array}{lll} badc & cadb & dabc \\ bdac & cdab & dcab \\ bcda & cdba & dcba \end{array}$$

3. Wir wollen in ähnlicher Weise den Fall von fünf Buchstaben *abcde* erforschen, in dem den ersten Platz entweder *b* oder *c* oder *d* oder *e* halten kann. Es soll also *b* den ersten Platz einnehmen, den zweiten Platz aber wollen wir dem Buchstaben *a* geben und die drei übrigen <Buchstaben> c, d und *e* lassen zwei Variationen zu, nämlich $badec, baecd$. Wenn aber dem Buchstaben *a* selbst der dritte Platz zugeteilt wird, lassen die drei übrigen <Buchstaben> drei Variationen zu, die wir so darstellen wollen $bcaed, bdaec, beacd$. Auf ähnliche Weise sind auch drei Variationen möglich, wenn dem Buchstaben *a* der vierte Platz zugeteilt wird, nämlich $bedac, bcead, bdeac$. Wenn wir dem Buchstaben *a* den fünften Platz zuweisen, werden drei Variationen folgen können: $bcdea, bdeca, bedca$. Während also dem Buchstaben *b* der erste Platz gegeben wird, werden im Ganzen elf Variationen gegeben sein; auf ebenso viele wird man aber auch treffen, wenn man entweder *c* oder *d* oder *e* an die erste Stelle setzt. Von da aus schließen wir, dass bei fünf Buchstaben *abcde* im Ganzen $4 \cdot 11$ oder 44 Variationen ihren Platz haben.

4. Wenn wir aber auf ähnliche Weise zu noch mehr Buchstaben fortschreiten wollen, würde die Aufzählung aller Fälle zu schwierig und mühselig, ja sogar fehleranfällig werden; deshalb müssen wir eine sichere Methode aufspüren, mit deren Hilfe die Anzahl der Variationen immer exakt bestimmt werden kann, wie groß die Anzahl der Buchstaben auch immer sein mag.

Zu diesem Zweck wird es sehr viel helfen, eine geeignete Formel zu Hilfe zu rufen, durch die für jede beliebige Anzahl herangezogener Buchstaben die Anzahl aller Variationen angezeigt wird. Es soll also diese Formel angegeben werden [11]

$$\Pi{:}n,$$

die Anzahl aller Variationen, die *n* Buchstaben zulassen, und da wir den Fall für n gleich 1 oder 2 oder 3 oder 4 oder 5 schon erledigt haben, wissen wir jetzt schon, dass

$$\begin{array}{lll} \Pi{:}1 = 0 & \Pi{:}2 = 1 & \Pi{:}3 = 2 \\ \Pi{:}4 = 9 & \Pi{:}5 = 44 & \end{array}$$

gilt; von da aus ist es klar, dass die Anzahl der Variationen bald ins Unendliche wachsen wird, wenn ich so weiter fortschreite.

5. Nachdem diese Formel nun aufgestellt ist, wollen wir jetzt sofort im Allgemeinen die Anzahl aller Variationen suchen für die Anzahl *n* der Buchstaben, die deshalb $\Pi{:}\, n$ sein wird; die ganze Aufgabe zielt darauf ab, dass aufgespürt wird, auf welche Weise diese Zahl berechnet werden kann, gesucht aus den vorangehenden, nämlich

$$\Pi{:}(n-1),\ \Pi{:}(n-2),\ \Pi{:}(n-3)$$

etc.. Die Berechnung wollen wir aber auf ähnliche Weise anstellen, die wir vorher angewandt haben. Zuerst also werden wir den Fall betrachten, in dem der Buchstabe *b* an erster Stelle steht. Leicht nämlich kann man erkennen, dass ebenso viele Variationen, wie sie für diesen Fall aufgetreten sind, auch herauskommen werden, wenn irgend ein anderer Buchstabe an die erste Stelle gesetzt wird; von da aus kann man erkennen, dass, welche Zahl von Variationen auch immer gefunden werden mag, wenn der Buchstabe *b* die erste Stelle innehat, diese Zahl mit $n-1$ multipliziert die Anzahl aller möglichen Variationen ergeben wird und deshalb auch die Gültigkeit der Formel $\Pi{:}n$ bestätigen wird.

6. Hier aber gehört es hin, zwei Fälle zu überdenken, je nachdem, ob der Buchstabe *a* den zweiten

[10]Mit Variationen bezeichnet Euler die fixpunktfreien Permutationen.

[11]Mit $\Pi{:}n$ bezeichnet Euler die Anzahl A_n der fixpunktfreien Permutationen der Länge *n*.

Platz innehat oder irgendeinen anderen. Wir wollen also a auf den zweiten Platz setzen, und es wird zu ermitteln sein, wie viele Variationen die übrigen Buchstaben c, d, e, f etc. zulassen werden; da deren Anzahl $n-2$ ist, wird die Anzahl der Variationen durch $\Pi{:}(n-2)$ bestimmt sein. Wir wollen weiterhin a auf den dritten oder irgendeinen anderen Platz setzen, und nun entsteht die Frage, wie viele Variationen die Buchstaben b, c, d, e, f etc. nun zulassen; dabei ist anzumerken, dass in deren Variationen der Buchstabe b nicht weiter vorkommen kann, weil er schon den ersten Platz innehat, aber dass an dessen Stelle bei den Variationen der Buchstabe a auftritt; und so wird es gerade so sein, als wenn unter Auslassung des ersten Platzes die Variationen der Buchstaben a, c, d, e, f etc. gesucht würden; da deren Anzahl $n-1$ ist, wird die Anzahl aller Variationen durch $\Pi{:}(n-1)$ bestimmt. Infolgedessen wird, wenn der Buchstabe b an die erste Stelle gesetzt wird, die Anzahl aller Variationen

$$\Pi{:}(n-2)+\Pi{:}(n-1)$$

sein.

7. Nun ist es per se offenkundig, dass sich ebenso viele Variationen ergeben werden, wenn jeder beliebige der übrigen Buchstaben an die erste Stelle gesetzt wird; da von all diesen Buchstaben, a als erster <Buchstabe> ausgeschlossen, die Anzahl $n-1$ ist, wird die Anzahl aller Variationen überhaupt

$$(n-1)\Pi{:}(n-2)+(n-1)\Pi{:}(n-1)$$

sein, was der Wert der gesuchten Formel $\Pi{:}n$ ist, so dass sich

$$\Pi{:}n=(n-1)\Pi{:}(n-1)+(n-1)\Pi{:}(n-2)$$

oder

$$\Pi{:}n=(n-1)\left(\Pi{:}(n-1)+\Pi{:}(n-2)\right)$$

ergibt. Und so wird die Zusammenfassung der zwei unmittelbar vorangehenden Formeln, nämlich

$$\Pi{:}(n-1)+\Pi{:}(n-2),$$

multipliziert mit $n-1$ immer die folgende Formel $\Pi{:}n$ ergeben. Mit Hilfe dieser Formel wird leicht das Weiterschreiten ermöglicht werden können, das durch die Anzahl der Variationen für die einzelnen Zahlen der Buchstaben festgelegt wird, wie weit man auch immer gehen mag.

8. Damit sich dies umso leichter zeigt, wollen wir mit den einfachsten Fällen anfangen und die Werte der Formel $\Pi{:}n$ mit der folgenden Tafel darstellen:

$$\begin{array}{rcl}
\Pi{:}3=2(\Pi{:}2+\Pi{:}1) & = & 2\cdot(1+0)=2\\
\Pi{:}4=3(\Pi{:}3+\Pi{:}2) & = & 3\cdot(2+1)=9\\
\Pi{:}5=4(\Pi{:}4+\Pi{:}3) & = & 4\cdot(9+2)=44\\
\Pi{:}6=5(\Pi{:}5+\Pi{:}4) & = & 5\cdot(44+9)=265\\
\Pi{:}7=6(\Pi{:}6+\Pi{:}5) & = & 6\cdot(265+44)=1854\\
\Pi{:}8=7(\Pi{:}7+\Pi{:}6) & = & 7\cdot(1854+265)=14833\\
\Pi{:}9=8(\Pi{:}8+\Pi{:}7) & = & 8\cdot(14833+1854)=133496\\
\Pi{:}10=9(\Pi{:}9+\Pi{:}8) & = & 9\cdot(133496+14833)=1334961
\end{array}$$

9. Wir wollen diese Zahlen $\Pi{:}n$, bezogen auf ihre Indizes, in der folgenden Reihe ordnen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Pi{:}n$	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496

Wenn wir aber diese Serie aufmerksam betrachten, werden wir aber eine besondere Beziehung erkennen, durch die jede Zahl auf die vorhergehende bezogen wird, wie die folgende Tabelle klar macht:

$$\begin{array}{rcllc}
2 & = & 3\cdot 1 & - & 1\\
9 & = & 4\cdot 2 & + & 1\\
44 & = & 5\cdot 9 & - & 1\\
265 & = & 6\cdot 44 & + & 1\\
1854 & = & 7\cdot 256 & - & 1\\
14833 & = & 8\cdot 1854 & + & 1\\
133496 & = & 9\cdot 14833 & - & 1\\
 & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

Mit Hilfe dieser Beobachtung also kann man unser Fortschreiten viel leichter fortsetzen, wobei jeder Term ganz sicher immer ein Vielfaches des vorhergehenden ist, vermehrt oder vermindert um 1; und so gilt im Allgemeinen

$$\Pi{:}n=n\Pi{:}(n-1)\pm 1.$$

Hierbei wird das Zeichen $+$ notiert, wenn n eine gerade Zahl ist, das Zeichen $-$ aber, wenn n ungerade sein mag.

10. Es scheint seltsam, wie diese zwei Gesetze des Fortschreitens miteinander zusammenhängen; man kann aber leicht aus dem nachfolgenden Gesetz das davor liegende ableiten. Setzt man nämlich

$$\Pi{:}n=n\Pi{:}(n-1)\pm 1,$$

dann wird sich auch in ähnlicher Weise

$$\Pi{:}(n-1)=(n-1)\Pi{:}(n-2)\mp 1$$

ergeben. Diese beiden Formeln werden addiert, so dass sich die entgegen gesetzten Zeichen $+$ oder $-$ gegenseitig aufheben, und die Summe wird

$$\Pi{:}n+\Pi{:}(n-1)=n\Pi{:}(n-1)+(n-1)\Pi{:}(n-2)$$

sein, woraus folgt, dass

$$\Pi{:}n = (n-1)\Pi{:}(n-1) + (n-1)\Pi{:}(n-2)$$

gilt, was selbst das frühere Gesetz des Fortschreitens ist.

Aber es ist nicht so leicht, das nachfolgende Gesetz aus dem vorhergehenden abzuleiten; jedoch wird dieses Unternehmen Erfolg versprechen, wenn wir denn bei den einfachsten Fällen beginnen und daran festhalten, dass $\Pi{:}1 = 0$ und $\Pi{:}2 = 1$ ist. Von hier aus ergibt sich nämlich

$$\Pi{:}3 = 2\Pi{:}2 = 3\Pi{:}2 - 1,$$

woraus

$$3\Pi{:}2 = \Pi{:}3 + 1$$

folgt.

Da nach dem vorangehenden Gesetz

$$\Pi{:}4 = 3\Pi{:}3 + 3\Pi{:}2$$

gilt, wird sich, wenn man hier anstelle von $3\Pi{:}2$ den eben gefundenen Wert einsetzt,

$$\Pi{:}4 = 4\Pi{:}3 + 1$$

ergeben, woraus

$$4\Pi{:}3 = \Pi{:}4 - 1$$

folgt.

Nun war die folgende Beziehung

$$\Pi{:}5 = 4\Pi{:}4 + 4\Pi{:}3;$$

wenn dort für $4\Pi{:}3$ der eben gefundene Wert eingesetzt wird, dann wird sich

$$\Pi{:}5 = 5\Pi{:}4 - 1$$

ergeben, und deshalb

$$5\Pi{:}4 = \Pi{:}5 + 1.$$

Und die folgende Beziehung ist

$$\Pi{:}6 = 5\Pi{:}5 + 5\Pi{:}4;$$

wenn wir in ihr anstelle des letzten Teils den vorher gefundenen Wert einsetzen, dann ergibt sich

$$\Pi{:}6 = 6\Pi{:}5 + 1,$$

und deshalb

$$6\Pi{:}5 = \Pi{:}6 - 1,$$

was, eingesetzt in die nachfolgende Beziehung

$$\Pi{:}7 = 6\Pi{:}6 + 6\Pi{:}5,$$

$$\Pi{:}7 = 7\Pi{:}6 - 1,$$

ergibt usw.; daraus kann man klar genug erkennen, wie die nachfolgende Beziehung aus der vorhergehenden abgeleitet werden kann.

4 Bewertung des Textes aus didaktischer Sicht

Bevor die Bedeutung des Textes für die Erschließung des Problems im Unterricht diskutiert wird, soll zunächst rückblickend untersucht werden, wie Euler die gestellte Aufgabe gelöst hat.

Zu Beginn des zweiten Abschnitts macht er deutlich, welche Strategie er einschlagen will: „Um die Lösung dieser Frage aufzusuchen, wollen wir zuerst die einfachsten Fälle betrachten, aus denen wir dann die Methode heraussuchen, die Lösung für eine welch große Anzahl an Buchstaben auch immer abzuleiten.“ Seine Überlegungen richten sich somit darauf, das *Allgemeine* im *Einfachen, Besonderen* aufzuspüren.

Euler ermittelt daher zunächst für kleine Permutationslängen jeweils die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen, indem er die betreffenden Permutationen wirklich konstruiert. Offenbar geht es ihm dabei aber weniger um die Bestimmung der Anzahlen als vielmehr um das Aufspüren eines *Musters*, das sich hinter diesen Permutationen verbirgt und den Schlüssel zur gesuchten Formel liefert.

Ein solches Muster scheint zunächst nicht erkennbar zu sein. Grund dafür ist vermutlich, dass sich für ein, zwei bzw. drei Buchstaben die Liste der fixpunktfreien Permutationen *unmittelbar* angeben lässt, wodurch der „Blick für das Muster“ verstellt wird. Doch schon mit vier Buchstaben wird es schwieriger, alle fixpunktfreien Permutationen zu überschauen, und notwendig, zur Erzeugung einer vollständigen Angabe *strategisch* vorzugehen. Dazu wird jeweils der zweite, dritte bzw. vierte Buchstabe (fixpunktfrei) auf die erste Position gesetzt und mit den übrigen drei Buchstaben wie zuvor verfahren. Damit deutet sich bereits eine *rekursive* Vorgehensweise an.

Bei $n = 5$ wird offensichtlich, dass es dabei noch einer Fallunterscheidung bedarf, je nachdem, ob bei der Besetzung des ersten Platzes mit dem i-ten Element ($i \neq 1$) das erste Element auf den i-ten oder irgendeinen anderen Platz gesetzt wird. Euler führt seine Überlegungen beispielhaft für den Buchstaben b als i-tem Element durch, doch ist die Übertragung auf andere Buchstaben offensichtlich.

Der erste der beiden Fälle – a wird auf den zweiten und b auf den ersten Platz gesetzt – bereitet keine Schwierigkeiten. Man braucht nur noch die übrigen Elemente fixpunktfrei zu permutieren, und dafür gibt es, in der Notation von Euler, $\Pi{:}(n-2)$ Möglichkeiten.

Der zweite Fall – b steht auf dem ersten und a auf *irgendeinem* anderen Platz (mit Ausnahme des zweiten) – ist nicht so leicht verständlich, und leider sind gerade hier die Ausführungen Eulers recht knapp gehalten. Da die erste Stelle mit b bereits fixpunktfrei besetzt ist, brauchen nur noch die Permutationen der restlichen $n-1$ Elemente a, c, d usw.[12] auf den Plätzen $2, 3, \ldots, n$ betrachtet zu werden. Dass die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen dabei genauso groß ist wie bei der Besetzung der Plätze $1, 2, \ldots, n-1$ mit den $n-1$ unmittelbar aufeinander folgenden Elementen a, b, c usw. , nämlich $\Pi{:}(n-1)$, wird verständlich, wenn man berücksichtigt, dass der zweite Platz für a „tabu“ ist, da die entsprechenden Möglichkeiten bereits im ersten Fall berücksichtigt wurden.

Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts kann man im Unterricht einerseits die fixpunktfreien Permutationen von a, b, c, d notieren und andererseits diejenigen von a, b, c, d, e, wobei b stets auf den ersten Platz gesetzt wird. Streicht man bei der zweiten Lösung alle Permutationen, bei denen a an zweiter Position steht, so hat man wie bei der ersten 9 Möglichkeiten.

Diese Überlegungen zur Fallunterscheidung führen im siebten Abschnitt schließlich zwanglos zu der gesuchten Rekursionsformel. Alles in allem erweist sich das Rencontre-Problem für den Unterricht als recht schwierig. Scheint eine Behandlung aus den eingangs genannten Gründen auch wünschenswert, so wird eine *selbständige* Bearbeitung wohl nur besonders mathematisch begabten Schülern wie im Fall Kratz gelingen, während für die übrigen mehr oder weniger starke Hilfestellungen erforderlich sein werden. So könnte man das Problem in eine Reihe von einander aufbauenden Teilaufgaben „zerlegen“, die Schüler dazu anhalten, geeignet gewählte Sonderfälle zu betrachten, ihre Aufmerksamkeit dabei auf bestimmte Aspekte lenken usw.

Als Alternative bietet sich an, die Lösung anhand des Textes von Euler *nachvollziehen* zu lassen. Dieser scheint dafür in besonderer Weise geeignet zu sein, da Euler in der für ihn typischen Art dem Leser nicht einfach das fertige Produkt seiner Überlegungen mitteilt, sondern ihn am *Prozess seiner Lösungsfindung* teilhaben lässt.

Dabei sind „Teilhaben“ und „Nachvollziehen“ keineswegs passive Haltungen, wie es auf den ersten Blick scheinen mag. Die Schüler müssen sich die Denkweise Eulers zu Eigen machen und gegebenenfalls die eigene Sichtweise korrigieren. Der Text lässt auch, wie anhand der notwendigen Fallunterscheidung gezeigt, genügend Freiräume für Eigenaktivitäten, ohne die sich die Lösung nicht vollständig erschließt. Dies beinhaltet auch, von Euler angegebene fixpunktfreie Permutationen für verschiedene n einmal selbst zu notieren und dabei evtl. auch andere Symbole zu verwenden; nur so wird man vollständige Klarheit über Eulers Gedankenführung gewinnen.

Für Lernende liefert der Text aber mehr als nur die Lösung zum Problem der vertauschten Briefe. Wichtig sind auch die o.a. *Heuristiken*, die Euler zur Problemlösung heranzieht und für den Leser transparent macht. Deren Anwendung kann für Schüler bei der Bearbeitung ähnlicher Aufgabenstellungen außerordentlich hilfreich sein.

Vergleicht man die Gedankenführung Eulers mit derjenigen der Schüler von H. Kratz, so werden deutliche Parallelen sichtbar. Die Leistung der Lernenden wird dadurch unterstrichen, dass es Montmort auch in mehrjähriger Auseinandersetzung mit der Problemstellung offenbar nicht gelungen ist, einen Beweis zu finden. Doch auch für diese Schüler könnte der Text noch eine ergiebige Quelle sein, geht Euler doch deutlich über die von ihnen gefundene Lösung hinaus, indem er über die berechneten Werte nach einer Vereinfachung der Rekursion sucht und mit unterschiedlichen Strategien zeigt, wie jeweils die eine in die andere überführt werden kann.[13]

[12] Der besseren Lesbarkeit wegen wurde Eulers Notation beibehalten.

[13] Die Verbesserung durch das zweite Verfahren wird heute beim Einsatz eines Computers augenscheinlich. Rechnet man dabei tatsächlich rekursiv (und nicht iterativ), so müssen beim ersten Verfahren wegen des doppelten rekursiven Aufrufs dieselben Funktionswerte mehrfach bestimmt werden – mit entsprechenden Auswirkungen auf Rechenzeit und Speicherplatzbedarf. Bei einer Permutationslänge von 30 wurden auf einem älteren Rechner (Pentium II) mit dem Computeralgebrasystem Derive 5.0 für das erste Verfahren knapp 3 Minuten und für das zweite 0,005s benötigt.

Abschließend noch eine Bemerkung zur Übersetzung: Wiedergegeben ist hier eine nahezu wörtliche Übersetzung aus dem Lateinischen mit der von Euler verwendeten mathematischen Notation. Ob man im Unterricht zu einer freieren Übersetzung und insbesondere zu einer modernen mathematischen Notation übergeht, mag jeder selbst entscheiden. Stillwell (2004, S. X) weist darauf hin, dass die Verwendung einer modernen Notation die Gefahr beinhaltet, die Mathematik einfacher erscheinen zu lassen als sie seinerzeit war, dass aber andererseits durch die Beibehaltung der ursprünglichen Notation die zentralen Ideen möglicherweise verschleiert werden. Mit diesem Problem bei der Verwendung historischer Texte wird man wohl leben müssen.

Literatur

Euler, L. (1923): Solutio quaestionis curiosae ex doxtrina combinatium. In: Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes. Leonhardi Euleri Opera Omnia. 7. Band. Wiesbaden: Teubner Verlag.

Hald, A. (1990): A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750. New York: Wiley-Intersc. Publ.

Henze, N. (1997): Stochastik für Einsteiger. Braunschweig: Vieweg Verlag.

Krämer, W. (1998): Denkste! Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen. München: Piper Verlag.

Kratz, H. (2005): Das Problem der vertauschten Briefe - zwei Wege zur Herleitung einer Rekursionsformel. In: Stochastik in der Schule 25(1)(2003), 11 – 15.

Montmort de, P.R. (1980): Essay d' analyse sur les jeux de hazard. Nachdruck der 2. Ausgabe von 1713. New York: Chelsea Publ. Comp.

Stillwell, J. (1980): Mathematics and Its History. New York: Springer Verlag.

Takács, L. (1980): The Problem of Coincidences. In: Archive for the History of Exact Sciences, 21 (1980), 229 – 244.

Anschrift des Verfassers
Dr. Peter Rasfeld
Fakultät für Mathematik
Bielefeld
Postfach 100131
D–33501 Bielefeld
peter.rasfeld@uni-bielefeld.de

DAGStat – Deutsche Arbeitsgemeinschaft Statistik **DMV/GDM-Jahrestagung 2007**

Es hat sich eine neue Dachgesellschaft statistischer Verbände gegründet. Informationen dazu finden Sie unter

http://www.dagstat.de/HPFG/

Der „Verein zur Förderung des schulischen Stochastikunterricht" hat die Mitgliedschaft in der DAGStat beantragt.

Die DAGStat wird ihre konstituierende Tagung vom 27. bis 30. März 2007 in Bielefeld abhalten. Unter http://www.statistik2007.de/homepage/index.html erfahren Sie Näheres über diese Tagung und können sich anmelden. Interessenten für die DAGStat-Tagung können sich auch an Rolf Biehler (biehler@mathematik.uni-kassel.de) wenden.

Vom 25. bis 30. März 2007 findet in Berlin die erste Gemeinsame Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) statt.
Die Organisatoren der beiden Tagungen streben an, dass Vorträge zur Didaktik der Stochastik in Berlin an den Tagen Montag bis Mittwoch und in Bielefeld an den Tagen Donnerstag und Freitag konzentriert werden.
Im Rahmen der Gemeinsamen Jahrestagung von DMV und GDM findet am Dienstag ein Schüler-Lehrer-Tag statt. Weitere Informationen und die Möglichkeit der Anmeldung finden Sie unter

http://www.dmv-gdm-2007.math.hu-berlin.de/.