

Ein anderer Zugang, Mittelwerte zu verallgemeinern

VON J. MATEJAS UND V. BAHOVEC, UNIVERSITY OF ZAGREB

Übersetzt und bearbeitet von Gerhard König (Originalartikel: Another Approach to Generalizing the Mean, Teaching Statistics Volume 30 (summer 2008) 2, S. 49–52)

Zusammenfassung: Dieser Artikel zeigt einen neuen Ansatz auf, die Definition von Mittelwerten zu verallgemeinern. Durch diesen Ansatz erhalten wir leicht verallgemeinerte Mittelwerte, die verschieden sind von den üblichen Mittelwerten wie z. B.: arithmetisches Mittel, geometrisches Mittel und harmonisches Mittel.

Einleitung und Motivation

Eine Motivation für diesen Aufsatz ist das folgende Problem. Nehmen wir an, wir hätten einen Quader mit den Seitenlängen a, b, c . Wie groß ist die durchschnittliche Seitenlänge dieses Quaders?

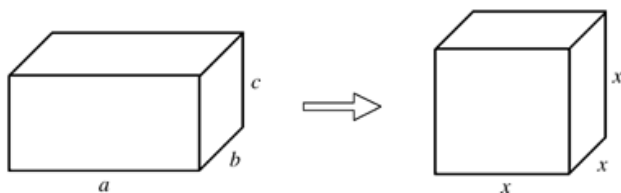


Abb. 1: Ein Quader wird durch einen Würfel ersetzt

Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir uns darüber im Klaren sein, was mit einer „durchschnittlichen Seitenlänge“ gemeint ist. Wir beantworten dies, indem wir die drei im allgemeinen verschiedenen Zahlen a, b, c durch die drei gleichen Zahlen x, x, x ersetzen, d.h. der Quader wird durch einen Würfel mit der Kantenlänge x ersetzt (s. Abbildung 1). Jetzt stellt sich die Frage: Wie können wir die Zahl x bestimmen? Offensichtlich brauchen wir einige zusätzliche Bedingungen für den Würfel, und dazu können wir mehrere praktische Möglichkeiten berücksichtigen.

Wenn unser Quader ein aus Stein, Stahl, Beton oder einem anderem Material gefertigter Festkörper ist, dann wäre die natürliche Bedingung, dass der Quader und der Würfel aus derselben Menge des Materials gebaut werden können. Das heißt, sie haben dasselbe Volumen und daraus würde folgen:

$$x \cdot x \cdot x = a \cdot b \cdot c \Rightarrow x = \sqrt[3]{abc},$$

welcher der uns bekannte geometrische Mittelwert wäre.

Wenn unser Quader als leerer Kasten, errichtet aus 6 dünnen Schichten beliebigen Materials, gedacht wird, dann wäre die natürliche Bedingung, dass der Quader und der Würfel denselben Oberflächeninhalt haben, dies bedeutet:

$$6x^2 = 2(ab + ac + bc) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{ab + ac + bc}{3}}$$

Wenn der Quader nur ein aus Draht angefertigtes Rahmenmodell ist (jede Kante ein Drahtstück, je drei treffen sich in einer Ecke), dann würden wir verlangen, dass Quader und Würfel aus derselben Drahtlänge gebaut werden können. Diese Bedingung ergibt das gewöhnliche arithmetische Mittel:

$$12x = 4(a + b + c) \Rightarrow x = \frac{a + b + c}{3}$$

Jetzt nehmen Sie an, dass der Quader ein aus Holz gefertigter leerer Kasten (eine Garderobe zum Beispiel) ist. Lassen Sie den Preis pro viereckige Einheit wie folgt sein: p_1 für die Vorderseite, p_2 für die oberen, unteren, linken und rechten Seitenwände und p_3 für die Rückseite. Wenn der Preis für den Quader und für den Würfel gleich sein soll, dann haben wir

$$p_1x^2 + 4p_2x^2 + p_3x^2 = p_1ac + p_2(2ab + 2bc) + p_3ac$$

sodass gilt:

$$x = \sqrt{\frac{p_1ac + 2p_2(ab + bc) + p_3ac}{p_1 + 4p_2 + p_3}}$$

Offensichtlich ergeben verschiedene Bedingungen verschiedene durchschnittliche Maße x , und diese können sich sehr von den Standardmittelwerten unterscheiden. Wir verallgemeinern diese Beispiele jetzt folgendermaßen. Wir nehmen an, dass eine beliebig gewählte stetige Funktion von drei Variablen $f(x_1, x_2, x_3)$ denselben Wert in den Punkten (a, b, c) und (x, x, x) annimmt.

Dann berechnen wir x aus der Gleichung

$$f(x, x, x) = f(a, b, c)$$

Diese Gleichung werden wir für eine allgemeine Definition des f -Mittelwertes benutzen.

f-Mittelwerte

Wir haben gesehen, dass ein verallgemeinertes Mittel einer Menge beliebiger Zahlen nicht nur von diesen

Zahlen, sondern auch von einer Bedingung abhängt. Es ist also eine Funktion, welche auf diesem Zahlenbereich definiert ist. So gewinnen wir die folgende allgemeine Definition, wobei wir uns auf positive reelle Zahlen beschränken:

Definition 1. Sei f eine stetige Funktion von n Variablen. Wenn dann ein x existiert, so dass gilt

$$f(x, x, \dots, x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

dann heißt x der f -Mittelwert der Zahlen

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Mit dieser Definition haben wir nun eine neue Möglichkeit, Mittelbildungen zu beschreiben, indem wir eine Funktion f angeben. Welche Funktionen beschreiben aber die bereits bekannten Mittelwerte? Die ersten 4 der folgenden Beispiele geben eine Antwort.

Beispiel 1. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, dann

$$\underbrace{x + x + \dots + x}_{nx} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

und dies ist der arithmetische Mittelwert. Das arithmetische Mittel mittelt also bezüglich der arithmetischen Verknüpfung „Summe“.

Beispiel 2. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$, dann

$$\underbrace{xx \dots x}_{x^n} = x_1 x_2 \dots x_n \Rightarrow x = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

und dies ist der geometrische Mittelwert. Das geometrische Mittel mittelt also bezüglich der arithmetischen Verknüpfung „Produkt“.

Beispiel 3. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$ dann

$$\underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{\frac{n}{x}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

$$\Rightarrow x = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

und dies ist der harmonische Mittelwert.

Beispiel 4. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, dann

$$\underbrace{x^2 + x^2 + \dots + x^2}_{nx^2} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

und dies ist der quadratische Mittelwert.

Beispiel 5. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$, dann

$$\underbrace{x^p + x^p + \dots + x^p}_{nx^p} = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}}$$

Diesen Mittelwert können wir als Potenz-Mittelwert (der Ordnung p) bezeichnen (s. auch Lambert/Hergert 2004 und Hergert 1985). Die Bezeichnungsweise ist hier uneinheitlich. Möglich sind Variationen wie p -tes Mittel, Mittel der Ordnung oder von Grad p oder Mittel mit Exponent p .

Man beachte, dass dieser Mittelwert eine Verallgemeinerung der Mittelwerte in den Beispielen 1, 3 und 4 ist, denn für $p = 1$ ergibt sich das arithmetische Mittel, für $p = -1$ das harmonische Mittel und für $p = 2$ das quadratische Mittel. Sheldon (2004) diskutiert diesen „verallgemeinerten Mittelwert“ genauer. Die gebräuchlichen Mittel sind also mit dem Potenz-Mittelwert formal gemeinsam dargestellt, das geometrische Mittel ergibt sich für den Grenzwert $p \rightarrow 0$ (s. Lambert/Hergert 2004).

Beispiel 6. Wenn

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{x_1^{r+p} + x_2^{r+p} + \dots + x_n^{r+p}},$$

dann

$$\underbrace{\frac{x^r + x^r + \dots + x^r}{x^{r+p} + x^{r+p} + \dots + x^{r+p}}}_{\frac{1}{x^p}} = \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{x_1^{r+p} + x_2^{r+p} + \dots + x_n^{r+p}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[p]{\frac{x_1^{r+p} + x_2^{r+p} + \dots + x_n^{r+p}}{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}}$$

Dies ist die Verallgemeinerung von Beispiel 5; für $r = 0$ haben wir das p -Mittel (Potenz-Mittelwert (der Ordnung p)), für $p = r = 1$ haben wir

$$x = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

welches als Eigengewichtsmittel (self-weighted mean) bezeichnet werden kann. Das Eigengewichtsmittel ist dasjenige gewichtete Mittel, bei dem jeder Wert mit sich selbst gewichtet wird. Es wird genauer untersucht im Aufsatz von Lann and Falk (2007).

Beispiel 7. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j$ dann

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^n x_i x_j}_{n^2 x^2} = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \Rightarrow x = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n x_i x_j}$$

Es ist also möglich, die bekannten Mittelwerte durch „erzeugende“ Funktionen zu beschreiben, deren Funktionsterm relativ einfach ist. Neben diesen im Allgemeinen symmetrischen Funktionen können wir jede andere Funktion, die sich aus Problemen der Praxis ergibt, auswählen. Wir geben einige weitere Beispiele.

Beispiel 8. Wenn $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{x_1 x_2}{x_3}}$ dann

$$\sqrt{\frac{\bar{x} \cdot \bar{x}}{x}} = \sqrt{\frac{x_1 x_2}{x_3}} \Rightarrow x = \frac{x_1 x_2}{x_3}$$

Beispiel 9. Wenn $f(x_1, x_2) = \frac{ax_1 + b}{cx_2 + d}$ dann

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ax_1 + b}{cx_2 + d} \Rightarrow x = \frac{adx_1 - bcx_2}{ac(x_2 - x_1) + ad - bc}$$

Beispiel 10. Wenn $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 \ln x_2 + x_2 \ln x_1}{x_1 + x_2}$ dann

$$\frac{x \ln x + x \ln x}{x + x} = \frac{x_1 \ln x_2 + x_2 \ln x_1}{x_1 + x_2}$$

$$\ln x \Rightarrow x = x_1^{\frac{x_2}{x_1+x_2}} \cdot x_2^{\frac{x_1}{x_1+x_2}}$$

Wir überlassen es dem Leser, weitere Beispiele zu konstruieren.

In Definition 1 ist es nicht notwendig, alle Variablen x_i ($i=1, 2, \dots, n$) durch x zu ersetzen, sondern nur einige. In diesem Fall erhalten wir eine Verallgemeinerung der Definition 1:

Definition 2. Sei f eine stetige Funktion von $n + m$ Variablen. Wenn ein x existiert, so dass gilt

$$f(x, x, \dots, x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

dann heißt die Zahl x der gewichtete f -Mittelwert der Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n mit den Gewichten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Beispiel 11. Wenn $n = m$ und $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, dann

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

welches das gewichtete Mittel der n Zahlen x_1, \dots, x_n ist. (s. auch Lann und Falk (2007)). Das gewichtete Mittel kann auch aus Definition 1 mittels der Funktion

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ gewonnen werden, aber hier sind die Gewichte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ fest vorgegeben.

Beispiel 12. Wenn $n = m$ und

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \text{ dann}$$

$$x^\alpha x^\alpha \dots x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \Rightarrow x = \sqrt[\alpha]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}}$$

mit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Das ist das gewichtete geometrische Mittel.

Ähnliche Resultate können auch für die oben gegebenen Funktionen erhalten werden.

Der f -Mittelwert hat die folgende bedeutende Eigenschaft:

Satz 1. Gegeben sei f wie in Definition 1 und sei g eine streng monotone Funktion. Wenn $F = g \circ f$ dann gilt:

$$F\text{-Mittelwert} = f\text{-Mittelwert.}$$

Beweis: Benutzt man Definition 1 für die Funktion F , dann gilt:

$$g[f(x, x, \dots, x)] = g[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Da g streng monoton ist, gilt $f(x, x, \dots, x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, und dies ist die Definition des f -Mittelwertes.

Dasselbe Resultat gilt für den gewichteten f -Mittelwert der Definition 2 und dies ist eine sehr wichtige Eigenschaft von f -Mittelwerten. Wenn wir den Mittelwert über eine erzeugende Funktion f bestimmen, dann gilt dieser auch für $const \cdot f, f \pm const, 1/f, \sqrt{f}, f^p, \ln f, e^f$, etc. Zu beachten sind lediglich die Definitionsbereiche der streng monotonen Funktionen.

Auf diese Art können wir durch Verwenden von Definitionen 1 und 2 und Satz 1 eine Vielfalt von Mittelwerten, die verschiedenen praktischen Situationen entsprechen, erhalten. Wir machen jetzt einige Beobachtungen. Die Definitionen 1 und 2 sind in der allgemeinen Form „wenn ein x existiert so dass ...“ formuliert. Hier ist zu bedenken, dass ein solches x nicht existieren muss, oder, wenn es

existiert, muss es nicht eindeutig sein. Wir geben einige Beispiele. Wenn $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$, dann ist $f(x, x)=1$ und die Gleichung $f(x, x)=f(x_1, x_2)$ kann nicht nach x aufgelöst werden. Etwas ähnliches ergibt sich im Fall $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. In einigen Fällen kann die erhaltene Gleichung nicht explizit nach x aufgelöst werden. Zum Beispiel, wenn $f(x_1, x_2) = x_1 \ln x_2$, dann $f(x, x) = x \ln x = x_1 \ln x_2$. Manchmal kann es mehrere Lösungen geben, wenn $f(x, x, \dots, x)$ keine streng monotone Funktion ist. Einige dieser Fragen könnten die Themen weiterer Analysen sein, die aber nicht das Ziel dieses Aufsatzes sind.

f- Abweichungen

Wenn ein Mittelwert x von beliebig vorgegebenen Zahlen gefunden ist, kann sich die Frage stellen, wie weit x von den vorgegebenen Zahlen abweicht, d.h wie gut die x_1, x_2, \dots, x_n durch x approximiert werden.

Definition 3. Sei x nach Definition 1 der f-Mittelwert der Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n . Wenn dann ein y existiert, sodass gilt

$$f(y, y, \dots, y) = f(|x - x_1|, |x - x_2|, \dots, |x - x_n|),$$

dann soll y die mittlere absolute f-Abweichung des f-Mittelwertes x von x_1, x_2, \dots, x_n heißen.

Beispiel 13. Sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ (siehe Beispiel 1), dann gilt für den arithmetischen Mittelwert x

$$\underbrace{y + y + \dots + y}_{ny} = |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n|$$

$$\Rightarrow y = \frac{|x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n|}{n}$$

und dies ist die mittlere arithmetisch-absolute Abweichung der Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n von ihrem arithmetischen Mittel x .

Beispiel 14. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ (siehe Beispiel 2), dann gilt für den geometrischen Mittelwert x

$$\underbrace{y \cdot y \cdot \dots \cdot y}_{y^n} = |x - x_1| \cdot |x - x_2| \cdot \dots \cdot |x - x_n|$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[n]{|x - x_1| \cdot |x - x_2| \cdot \dots \cdot |x - x_n|}$$

und dies ist die mittlere geometrisch-absolute Abweichung des x von x_1, x_2, \dots, x_n .

Beispiel 15. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$ (siehe Beispiel 3), dann gilt für den harmonischen Mittelwert x

$$\underbrace{\frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \dots + \frac{1}{y}}_{\frac{n}{y}} = \frac{1}{|x - x_1|} + \frac{1}{|x - x_2|} + \dots + \frac{1}{|x - x_n|}$$

$$\Rightarrow y = \frac{n}{\frac{1}{|x - x_1|} + \frac{1}{|x - x_2|} + \dots + \frac{1}{|x - x_n|}}$$

und dies ist die mittlere harmonisch-absolute Abweichung des x von x_1, x_2, \dots, x_n .

Beispiel 16. Wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ (siehe Beispiel 4), dann gilt für den quadratischen Mittelwert x

$$\underbrace{y^2 + y^2 + \dots + y^2}_{ny^2} = |x - x_1|^2 + |x - x_2|^2 + \dots + |x - x_n|^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{|x - x_1|^2 + |x - x_2|^2 + \dots + |x - x_n|^2}{n}}$$

und dies ist die mittlere quadratisch-absolute (durchschnittliche quadrierte-absolute) Abweichung der x_1, x_2, \dots, x_n von x (nicht zu verwechseln mit der Varianz).

Ähnliche Resultate erhalten wir für andere Beispiele aus dem vorhergehenden Abschnitt.

Literatur

Wilfried Herget (1985): Der Zoo der Mittelwerte. In: *mathematik lehren*, Heft 8, S.50–51
 Anselm Lambert; Wilfried Herget (2004): Mächtig viel Mittelmaß in Mittelwert-Familien. In: *MU, Der Mathematikunterricht* v.50(Okttober 2004)5, S.55–66
 Lann, A. and Falk, R. (2007): Ein etwas vernachlässigter Mittelwert. In: *Stochastik in der Schule* v.27(2007)1, S. 2–4
 Sheldon, N. (2004): The generalized mean. In: *Teaching Statistics*, v.26(2004)1, S. 24–25

Anschriften der Verfasser

J. Matejaš and V. Bahovec
 University of Zagreb, Croatia.
 e-mail: jmatejas@efzg.hr;
 bahovec@efzg.hr