Eine kleine Aufgabe zur Förderung des stochastischen und reell-algebraischen Denkens

Martin Epkenhans, Paderborn

***Zusammenfassung**: Anhand einer kleinen leicht verständlichen Problemstellung, deren Lösung und verschiedenen Verallgemeinerungen soll gezeigt werden, wie vernetzt sekundäre stochastische Intuitionen und Kompetenzen in der Bruchrechnung gefördert werden können.*

1 Einleitung

Wir wollen eine kleine Aufgabe zur Stochastik vorstellen. Bei einem Tennisturnier soll man zwischen zwei möglichen Turnierverläufen denjenigen wählen, der die höhere Siegwahrscheinlichkeit beinhaltet.

Erfahrungsgemäß entscheiden sich viele Menschen der primären stochastischen Intuition folgend für die stochastisch falsche Variante, eine einheitliche unreflektierte Beurteilung mit einer starken Präferenz zu einer Variante gibt es jedoch nicht (siehe auch Tietze et al. (2002, S. 135 ff.)). Damit ist ein kognitiver Konflikt geboren, der Anlass zu einer mathematischen Untersuchung geben kann. Nach Lösung des Problems blickt man auf die anfänglichen Argumentationen zurück und kontrastiert diese mit den mathematischen Erkenntnissen, um dann evtl. entstandene neue Erkenntnisse in Verallgemeinerungen der Problemstellung zu verifizieren. Eine wichtige Intention dieser Arbeit liegt in der Vernetzung und Gleichgewichtung verschiedener mathematischer Kompetenzen. So steht nicht allein die stochastische Aufgabe im Vordergrund, ein geschickter Umgang mit der Bruchrechnung und Ungleichungen soll hier ebenfalls gefördert werden.

Diese Aufgabe findet sich teilweise mit anderen Sachkontexten bzw. anderen Verallgemeinerungen an verschiedenen Stellen bereits in der Literatur. Verwiesen sei an dieser Stelle auf Althoff (1985 a, 1985 b, Aufgabe 22 und 23) und auf Engel (1973, S. 17). Zum Jahr der Mathematik 2008 ist die hier betrachtete stochastische Ausgangssituation auch einmal in einem politischen Kontext in einer Tageszeitung geschildert worden (Bruss 2008).

Wir sprechen hier von reell-algebraischem Denken im Sinne der reellen Algebra, die sich mit der Theorie angeordneter Körper beschäftigt. Hat man die erforderlichen Terme zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten bestimmt, kann im konkreten Fall durch numerisches Auswerten die Eingangsfrage jeweils beantwortet werden. Diesen Weg gehen in der Regel die Schülerinnen und Schüler. An dieser Stelle wollen wir jedoch zeigen, dass ohne diese Auswertung durch geschicktes Vergleichen der Terme entschieden werden kann, welche Wahrscheinlichkeit die größere ist.

Die notwendigen fachlichen Kenntnisse der Stochastik können etwa in Büchter und Henn (2006) nachgelesen werden.

2 Einsatzmöglichkeiten

Zum Verständnis der Aufgabe sind keine Spezialkenntnisse aus anderen Disziplinen erforderlich, das Alltagswissen der Schülerinnen und Schüler reicht vollkommen aus. Zur Lösung der Grundaufgabe sollte man Wahrscheinlichkeitsbäume inklusive der Pfadregeln kennen. Somit ist die Aufgabe in der Sekundarstufe I einsetzbar, konkrete Verallgemeinerungen können ebenfalls vorgenommen werden. Zu beachten ist jedoch, dass nicht mehr alle Lehrpläne mehrstufige Zufallsexperimente in dieser Schulstufe vorsehen (Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW 2007). Verallgemeinerungen auf eine beliebige Anzahl von Spielen hingegen sollten der gymnasialen Oberstufe vorbehalten bleiben.

3 Die Aufgabe

Ein Kind spielt gegen seine Eltern ein kleines Tennisturnier nach den folgenden Regeln:

- Ein Turnier besteht aus drei Spielen.
- Das Kind spielt abwechselnd gegen die Mutter und den Vater.
- Das Kind darf entscheiden, gegen welchen Elternteil es zuerst spielt.
- Das Kind gewinnt das Turnier, falls es zwei Spiele in Folge gewinnt.

Gewöhnlich gewinnt das Kind eins von drei Spielen gegen den Vater, aber zwei von drei Spielen gegen die Mutter. Für welche Reihenfolge soll es sich entscheiden?

4 Der Einstieg

Es gibt zwei verschiedene Spielfolgen: Vater – Mutter – Vater ($V – M – V$) oder Mutter – Vater – Mutter

($M - V - M$). Es empfiehlt sich, dass man zu Beginn die Schülerinnen und Schüler auffordert, sich spontan für eine Spielfolge zu entscheiden. Bei nicht repräsentativen Umfragen im Unterricht und auch an der Hochschule bei Lehramtsstudierenden tendierte immer eine Mehrzahl zur zweiten Variante, eine klare Entscheidung zugunsten eines Spielverlaufs gab es jedoch nie. Damit ist ein ausreichender Gesprächsanlass gegeben, und im Laufe der Diskussion verfestigt sich die Einsicht der Notwendigkeit einer stochastischen Untersuchung.

5 Eine Lösung

Wir wollen nun eine Lösungsvariante vorstellen. Anfangs muss man erkennen, dass zwei Wahrscheinlichkeiten in zwei verschiedenen Wahrscheinlichkeitsräumen verglichen werden müssen bzw. dass zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsbäume zu betrachten sind. Die Wahl der Werte $p_1 = \frac{1}{3}$ und $p_2 = \frac{2}{3}$ für die Erfolgswahrscheinlichkeiten kann dazu führen, dass man hier irrtümlich von einer Bernoullikette ausgeht.

Diese Schwierigkeit kann durch eine andere Wahl der Werte, etwa $p_2 = \frac{3}{4}$, umgangen werden.

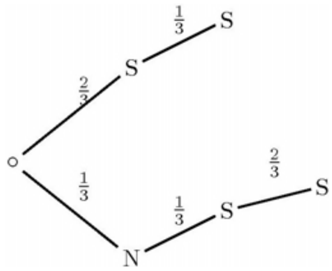
Betrachten wir zuerst den Spielverlauf $V - M - V$. Einige Schülerinnen und Schüler, die eher zu algorithmischen Lösungen neigen, betrachten gewöhnlich den vollständigen Wahrscheinlichkeitsbaum. Da in dieser Aufgabe zwei Bäume betrachtet werden müssen, sollte man im Unterricht darauf achten, dass zumindest der zweite Baum ein reduzierter Baum ist. Wir werden direkt mit dem reduzierten Baum arbeiten.

Sei S = Sieg, N = Niederlage. Nur die drei Spielverläufe $S - S - S$, $S - S - N$, $N - S - S$ führen zum Gewinn des Turniers für das Kind. Mithilfe der Pfadregeln ermittelt sich die Gewinnwahrscheinlichkeit der Spielfolge $V - M - V$ zu

$$p_{VMV} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}.$$

Spätestens jetzt sollte erkannt werden, dass das Turnier nach Siegen in den ersten zwei Spielen für das Kind gewonnen ist und somit abgebrochen werden kann. Diese Erkenntnis entsteht bei Schülerinnen und Schülern vielfach schon früher. Entscheidend ist an dieser Stelle, dass man erkennt, wie sich dieser Sachverhalt mathematisch auswirkt.

Mathematisch spiegelt sich diese Beobachtung darin wieder, dass die beiden ersten Summanden zu $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$ vereinfacht werden können. Diese Erkenntnis nutzen wir, um einen reduzierten Baum für die Spielfolge $M - V - M$ zu zeichnen.



Somit gilt $p_{MVM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$. Eine numerische Auswertung der Terme, zu der viele Schülerinnen und Schüler hier neigen, ergibt $p_{VMV} = \frac{10}{27} > \frac{8}{27} = p_{MVM}$. Daher sollte das Kind zuerst gegen den Vater antreten. Dieses Ergebnis kann man auch ohne zu rechnen erhalten. Die Summe der beiden ersten Summanden von p_{VMV} entspricht nach obiger Überlegung genau dem ersten Summanden von p_{MVM}. Aus dem Monotoniegesetz der Addition der reellen Zahlen folgt nun, dass man nur die jeweils letzten Summanden der Größe nach vergleichen muss. Da bei diesen beiden Dreifachprodukten jeweils dieselben Faktoren $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ vorkommen, folgt aus dem Monotoniegesetz für die Multiplikation reeller Zahlen $p_{VMV} > p_{MVM}$, da $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.

Da man beim Größenvergleich zweier Terme anfangs gewöhnlich nicht weiß, welcher der Größere ist, kann man stattdessen die Differenz der Terme bezüglich ihres Vorzeichens untersuchen. Man erhält

$$\begin{aligned} p_{VMV} - p_{MVM} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) > 0 \end{aligned}$$

Auch hier ist keine numerische Auswertung erforderlich.

An dieser Stelle empfiehlt es sich, die anfangs gebrachten Argumente für den einen oder den anderen Turnierverlauf kritisch zu hinterfragen, um so Fehler in der eigenen Argumentation zu erkennen. Folgt man der primären stochastischen Intuition, so neigen einige dazu, den Verlauf $M - V - M$ als den besseren anzusehen, da man gegen die Mutter die besseren Gewinnchancen hat und bei diesem Verlauf zweimal gegen sie spielt. Entscheidender ist aber nun, dass man das zweite Spiel gewinnen muss. Ist daher die höhere Gewinnchance gegen die Mutter ein Argument, das zweite Spiel gegen sie zu spielen? Schauen wir in die nicht ausgerechneten Terme

$$p_{MVM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

und

$$p_{VMV} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

für die Turniersiegwahrscheinlichkeiten. Der erste Summand ist in beiden Fällen gleich. Dies wird im Nachhinein auch klar, denn die Wahrscheinlichkeit, die beiden ersten Spiele in Folge zu gewinnen, muss unabhängig von der Reihenfolge der Spiele sein. Der Unterschied liegt im zweiten Summanden, hier aber nicht in den beiden letzten Faktoren. Dieses Produkt gibt die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Turniersieg an, falls man das erste Spiel verloren hat. In welcher Reihenfolge man die beiden letzten zu gewinnenden Spiele spielt, ist unerheblich. Somit ergibt sich die überraschende Erkenntnis: Mathematisch analysiert ist es besser, zuerst gegen die Person zu spielen, gegen die man die größere Niederlagenwahrscheinlichkeit, sprich, geringere Siegchance hat.

6 Erste Verallgemeinerung

Die gewonnenen Erkenntnisse kann man nun allgemein bestätigen. Dazu seien die Siegchancen gegen den Vater und die Mutter p_V und p_M mit

$$0 < p_V, p_M < 1.$$

Da alle Werte positiv sind, ergibt sich

$$p_{VMV} > p_{MVM} \Leftrightarrow (1-p_V) > (1-p_M) \Leftrightarrow p_M > p_V.$$

Eine wichtige mathematische Erkenntnis an dieser Stelle lautet: Nicht immer sollte man alle Terme numerisch auswerten. Ein Größenvergleich kann auch ohne Auswertung funktionieren. Je nach Leistungsstärke der Lerngruppe kann diese Information auch als Tipp geben werden.

7 Weitere Verallgemeinerungen

Von den vielen möglichen Verallgemeinerungen wollen wir an dieser Stelle nur zwei behandeln. Siehe hierzu auch Aufgabe 23 in Althoff (1985 a). Gespielt wird in beiden Fällen eine beliebig vorgegebene Anzahl von $n \geq 3$ Spielen. Das Kind spielt weiterhin abwechselnd gegen Mutter und Vater und darf wählen, gegen wen es das erste Spiel bestreitet.

1. Siegkriterium: Das Kind hat gewonnen, wenn es $n-1$-Spiele in Folge gewinnt.

2. Siegkriterium: Das Kind hat gewonnen, wenn es wenigstens zwei Spiele in Folge gewinnt.

Natürlich kann man an dieser Stelle zunächst konkrete Werte für n vorgeben, etwa $n = 4, 5, 6$ und danach nach allgemeinen Aussagen suchen. Alternativ fordert man die Schülerinnen und Schüler auf, eigene Verallgemeinerungen zu suchen und selbstständig wiederum Spezialfälle der allgemeinen Situation zu betrachten, um so Erkenntnisse für einen allgemeinen Fall zu finden. So lernt man elementare mathematische Vorgehensweisen kennen.

Auch kann man an dieser Stelle Tipps der Schülerschaft einfordern, insbesondere kann man fragen, welche Argumentationen wohl weiterhin tragen.

Betrachten wir das erste Siegkriterium. Die siegreichen Spielverläufe gestalten sich ähnlich wie in der Standardsituation: Es gibt drei siegreiche Pfade im Baum: Man gewinnt die ersten $n-1$ Spiele, der Ausgang des letzten Spiels ist unerheblich, oder man verliert das erste Spiel und gewinnt alle folgenden. Auch hier kann man die Pfadwahrscheinlichkeiten zu zwei Summanden zusammenziehen. Eine Betrachtung von $n = 4$ zeigt, dass man bei geradem n eine ungerade Anzahl von Spielen in Folge gewinnen muss, somit die Pfadwahrscheinlichtkeiten in den beiden Turnierverläufen nicht identisch sind. Im Fall n ungerade muss man hingegen die gleiche Anzahl von Spielen gegen den Vater und gegen die Mutter gewinnen, sodass man hier wie im Fall $n = 3$ argumentieren kann und das gleiche Ergebnis erhält. Setze dazu $n = 2m + 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} p_{VM\ldots} - p_{MV\ldots} &= p_V^m\, p_M^m + (1-p_V)p_V^m\, p_M^m \\ &\quad - \left(p_V^m\, p_M^m + (1-p_M)p_V^m\, p_M^m\right) \\ &= p_V^m\, p_M^m (p_M - p_V) \end{aligned}$$

Sei nun $n = 2m + 2$ gerade. Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{VM\ldots} &= p_V^{m+1}\, p_M^m + (1-p_V)\, p_M^{m+1}\, p_V^m \\ &= p_V^m\, p_M^m (p_V + p_M - p_M\, p_V) \end{aligned}$$

und dieser Term ist symmetrisch in p_V, p_M. Daher sind hier die Siegchancen bei beiden Turnierverläufen gleich.

Kommen wir zum zweiten Siegkriterium. Behandelt man diesen Fall allgemein, so bemerkt man schnell, dass es schwierig ist, alle siegreichen Spielverläufe zu notieren bzw. diese im Wahrscheinlichkeitsbaum zu markieren. So kann man etwa zwei Spiele in Folge gewinnen, danach mehrmals verlieren, um erneut zwei Spiele in Folge zu gewinnen, oder aber man gewinnt zwischendurch ein Spiel, verliert aber das folgende Spiel. Wir wissen an dieser Stelle bereits, dass das Turnier abgebrochen werden kann, sobald erstmalig zwei Spiele in Folge gewonnen wurden, und wir haben gelernt, wie sich dieser Turnierabbruch auf die zu bestimmende Siegwahrscheinlichkeit auswirkt: Hat man nach den ersten k Spielen noch nicht gewonnen und dann die folgenden zwei Spiele gewonnen, so multiplizieren wir die zu diesem Pfadanfang gehörenden Wahrscheinlichkeiten und erhalten so die Siegwahrscheinlichkeit für alle Spielverläufe dieses Teilbaums, denn die Wahrscheinlichkeiten für die Pfade des Baumes für die restlichen $n - k - 2$ Spiele addieren sich zum Wert 1.

Auch mit diesen Überlegungen wird es nicht einfach. Es empfiehlt sich an dieser Stelle, die Fälle $n = 4, 5, 6$ zu betrachten. Ist $n = 4$ oder $n = 6$, so ist die Siegwahrscheinlichkeit unabhängig von der gewählten Reihenfolge. Diese Beobachtung kann generell auf gerade n verallgemeinert werden. Argumentieren kann man dazu etwa wie folgt: Wir betrachten alle siegreichen Spielverläufe in ihrer vollen Länge. Eine Serie von Spielen, die gegen den Vater begonnen wird, endet mit einem Spiel gegen die Mutter. Nun durchlaufen wir diesen Pfad einfach rückwärts. Die Pfadwahrscheinlichkeit bleibt die gleiche. Ein Pfad ist genau dann ein siegreicher Pfad, wenn zwei benachbarte Spiele gewonnen werden. Daher ist es unerheblich, ob man einen Pfad vorwärts oder rückwärts durchläuft.

Bei ungeradem n könnte man etwa wie folgt argumentieren: Um das Turnier zu gewinnen, muss man auf jeden Fall eines der $n - 2$ „Nicht-Rand-Spiele“ gewinnen. Daher sollte man die beiden Randspiele gegen den stärkeren Gegner spielen, da so bei den Nicht-Rand-Spielen die Anzahl der Spiele gegen den schwächeren Gegner überwiegt.

Nun überzeugen nicht jeden solche Plausibilitätsargumente, insbesondere dann nicht, wenn man sich zuvor von seiner Intuition hat täuschen lassen. Wir wollen daher ansatzweise den Fall n ungerade diskutieren. Dabei beschränken wir uns zunächst nur auf die Beantwortung der Frage, welcher Turnierverlauf der günstigere ist. Die konkreten Siegwahrscheinlichkeiten bestimmen wir nicht.

Sei $n = 5$. Das Turnier gewinnt man, wenn man spätestens nach vier Spielen bereits gewonnen hat oder aber wenn man erst durch den Sieg im fünften Spiel gewinnt. Da die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall unabhängig von der Reihenfolge ist, müssen wir nur die Pfade $N-N-N-S-S$, $S-N-N-S-S$ und $N-S-N-S-S$ betrachten. Die beiden ersten Verläufe lassen sich so zusammenfassen: Egal wie das erste Spiel ausgeht, man verliert danach zweimal und gewinnt in Folge zweimal. Die Wahrscheinlichkeit ist also unabhängig von der Reihenfolge. Es bleibt der Verlauf $N - S - N - S - S$, zu dem die Wahrscheinlichkeiten $(1-p_M)\,p_V\,(1-p_M)\,p_V\,p_M$ bzw. $(1-p_V)\,p_M\,(1-p_V)\,p_M\,p_V$ gehören. Also sollte man erneut erst gegen den Gegner spielen, gegen den man die geringere Siegchance hat.

Will man ungerade n nun allgemein betrachten, empfehlen sich Markovketten. Ich danke einem der Gutachter für den Hinweis, an dieser Stelle mit der Theorie der Markovprozesse zu argumentieren.

8 Eine Lösung mit Markovketten

Zur Theorie der Markovprozesse verweisen wir auf Büchter und Henn (2006). Wir betrachten die folgenden fünf Zustände:

A_p: Noch zwei Gewinne erforderlich und nächster Gegner ist der Vater.

A_q: Noch zwei Gewinne erforderlich und nächster Gegner ist die Mutter.

B_p: Noch ein Gewinn erforderlich und nächster Gegner ist der Vater.

B_q: Noch ein Gewinn erforderlich und nächster Gegner ist die Mutter.

C: Zwei Gewinne erreicht (absorbierend).

Die zugehörige Übergangsmatrix hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-q & 0 & 1-q & 0 \\ 1-p & 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 1 \end{pmatrix}$$

Mittels eines CAS kann die n-te Potenz A^n bestimmt werden. Die Koeffizienten a_{51} (bzw. a_{52}) von A^n zeigen dann die Gewinnwahrscheinlichkeiten nach n Spielen, falls das Turnier mit einem Spiel gegen den Vater (bzw. die Mutter) begonnen wird.

9 Zur didaktischen Umsetzung

Die Aufgabe bietet vielfältige Möglichkeiten der Umsetzung und kann der konkreten Lerngruppe angepasst werden. Neben den sich bietenden Möglichkeiten der Differenzierung kann die Aufgabe auch so gestellt werden, dass arbeitsteilig und selbstgesteuert von der Lerngruppe in Kleingruppen gearbeitet wird. So kann nach einer ersten Diskussion des Problems das Untersuchen der zwei Turnierverläufe auf zwei Teilgruppen verteilt werden oder aber die eine Gruppe betrachtet Turniere mit 4, die anderen mit 5, 6 oder mehr Spielen. Je nach Leistungsstärke können Informationen zur Lösung in die Lerngruppe hineingegeben werden.

10 Der Werkzeugeinsatz

Bei dieser Aufgabe und der kognitiven Zielsetzung der Unterrichtseinheit empfiehlt es sich, bewusst auf einen Taschenrechner zu verzichten, diese Bedingung sollte evtl. konkret in der Aufgabenstellung aufgenommen werden. Falls in der Lerngruppe die Notwendigkeit einer mathematischen Untersuchung wegen des fehlenden kognitiven Konflikts nicht erkannt wird, kann man die Situation mit einem kleinen Computerprogramm simulieren. Dazu müsste man natürlich wissen, wie man die unterschiedlichen Siegwahrscheinlichkeiten im Rechner simulieren kann. Man arbeitet mit Zufallszahlen modulo 3.

11 Abschließende Bemerkung

Das Ergebnis der Aufgabe steht nicht so sehr im Zentrum des Arbeitens. Entscheidender sind hier die prozessbezogenen Kompetenzen, die Lösungsstrategien, die hier gefördert werden und etwas abstrahiert tragfähig für weiteres mathematisches Arbeiten sind. Daher ist es essenziell, diese im Unterricht konkret herauszuarbeiten.

Literatur

Althoff, Heinz (1985 a): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Stuttgart: Metzler.

Althoff, Heinz (1985 b): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Lösungen*. Stuttgart: Metzler Schulbuchverlag.

Bruss, F. Thomas (2008): *Tipps für Koch, Ypsilanti & Co*. In: Die Welt-Online, URL: www.welt.de/wissenschaft/article1720834/tipps_fuer_Koch_Ypsilanti_amp_Co.html. (Stand 25.3.2009)

Büchter, Andreas; Henn, Hans-Wolfgang (2006): *Elementare Stochastik*. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin/Heidelberg: Springer.

Engel, Arthur (1973): *Wahrscheinlichkeitsrechung und Statistik. Band 1*. Stuttgart: Klett.

Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW (2007): *Kernlehrplan Mathematik für die Sekundarstufe I des Gymnasiums.* Fechen: Ritterbach.

Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred; Wolpers, Hans (2002): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Anschrift des Verfassers

Martin Epkenhans
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Universität Paderborn
33098 Paderborn
martine@uni-paderborn.de

Ein kleines Simpson-Paradoxon bei den Ergebnissen von PISA-E

Renate Motzer, Augsburg

Zusammenfassung: *Vergleicht man die Ergebnisse der Leistungen bayerischer und sächsischer Schüler bei PISA-E 2006, so findet man zwar meist nur hauchdünne Unterschiede, aber diese widersprechen sich interessanterweise entsprechend des Simpson-Paradoxons.*

Im nationalen Vergleich haben bei PISA 2006 bekanntlich die sächsischen Schülerinnen und Schüler (der Einfachheit wegen im Weiteren unter „Schüler" zusammengefasst) am besten abgeschnitten und liegen diesmal vor den Jugendlichen aus Bayern.

Am deutlichsten ist ihr Vorsprung im Bereich der Naturwissenschaften (Sachsen: 541 Punkte, Bayern 533). In Mathematik (Sachsen 523, Bayern 522) und im Leseverständnis (Sachsen 542, Bayern 541) ist der Vorsprung nur hauchdünn (und natürlich in keiner Weise signifikant).

Schaut man sich aber z. B. nur die Leistungen von Gymnasiasten an, so ist bei den Naturwissenschaften Bayern mit den Sachsen gleichauf (619), in Mathematik (Bayern 608, Sachsen 599) und im Lesen (Bayern 598, Sachsen 587) erzielten die bayerischen Schülerinnen und Schüler einen kleinen Vorsprung.

Paradoxerweise kann nun festgestellt werden, dass es in Sachsen auch bei den Nichtgymnasiasten in Mathematik und bei den Leseleistungen keinen Vorsprung gegenüber Bayern gibt (Mathematik: Sachsen 487, Bayern 489, Lesen: Sachsen 477, Bayern 478). Nur in den Naturwissenschaften sind die sächsischen Nichtgymnasiasten mit 504 zu 500 Punkten ein bisschen erfolgreicher, aber auch hier ist der Unterschied nur halb so groß wie der, der sich ergibt, wenn man alle Schülerinnen und Schüler zusammennimmt. Da in Sachsen nicht zwischen Haupt- und Realschule getrennt wird, kann in der Gruppe der Nichtgymnasi-