Stochastik und Analysis verzahnt in der Lehrer(innen)bildung am Beispiel Fehlerverteilung

Petra Hauer-Typpelt, Wien

Zusammenfassung: *Das Zusammenspiel von Anwendungsorientierung im klassischen Sinn und Methoden der Analysis zum Erkenntnisgewinn im Bereich Stochastik steht im Zentrum dieses Aufsatzes. Auf einer einzigen praxisorientierten Annahme basierend wird die Normalverteilung als Fehlerverteilung entwickelt. Um den Themenbereich umfassend zu beleuchten und seine Wurzeln aufzuzeigen, fließen auch historische Aspekte ein.*

1 Einleitung

Der Ursprung des vorliegenden Artikels liegt im Bemühen, im Rahmen einer Lehrveranstaltung für zukünftige Mathematiklehrer(innen) ein umfassendes Verständnis der Normalverteilung aufzubauen. Neben verschiedenen anderen Konzeptionen (siehe z. B. Hauer-Typpelt 2006) sollte geklärt werden, warum Messfehler das Protobeispiel normalverteilter Größen sind, und zwar über das Maß der üblichen verbalen Begründung mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes hinaus.[1]

Im Zuge der Arbeit, sowohl in der Vorbereitung als auch mit den Studierenden, verlangten immer mehr Aspekte eine ausführliche Behandlung, sodass nun ein Ergebnis vorliegt, in welchem

- leicht verständlicher, auch intuitiv klarer, Praxisbezug,
- gut nachvollziehbare historische Bezüge,
- Anwendung von Vorwissen aus Stochastik und Analysis und
- daraus resultierender Erkenntnisgewinn

aufeinandertreffen. Damit wird einiges von dem, was in der Lehrer(innen)bildung vermittelt werden sollte, in einer Unterrichtseinheit erfasst. In historischer Hinsicht werden hier zumindest kleine Einsichten in Ideen und Überlegungen eines der bedeutendsten Mathematiker gegeben, die durchaus zu einem tieferen Studium seiner Werke anregen wollen.

2 Auf den Spuren von Gauß

„Ob ich Mathematik auf ein paar Dreckklumpen anwende, die wir Planeten nennen, oder auf rein arithmetische Probleme, es bleibt sich gleich, die Letzteren haben nur noch einen höheren Reiz für mich.“, kommentierte einst Carl Friedrich Gauß (1777–1855) seine mathematisch-astronomische Arbeit (zitiert nach W. Sartorius von Waltershausen 1856, S. 101/102).

Obwohl die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht zu den Schwerpunkten seiner mathematischen Arbeit gehörte, konnte Gauß nicht umhin, sich mit Überlegungen und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beschäftigen. Denn durch sein anhaltendes Interesse und seine Arbeit im Bereich der Astronomie und später auch der Geodäsie sah er sich gezwungen, Methoden zur Auswertung von Beobachtungs- und Messergebnissen zu erarbeiten und entwickelte daraus seine Theorie der Beobachtungs- bzw. Messfehler. Die dazu zu seinen Lebzeiten veröffentlichten Arbeiten widmete er allerdings nie der Theorie selbst, sondern ihren Anwendungen. Wie hinlänglich bekannt, verringerte das aber nicht die Bedeutung seiner Überlegungen und Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeitsrechnung per se, sondern bereicherte diese enorm. Einerseits durch seine herausragenden Ergebnisse, andererseits weil nachfolgende Forscher angeregt wurden, beispielsweise die Bedingungen für die Anwendbarkeit des Normalverteilungsgesetzes als Fehlerverteilungsgesetz zu klären und somit eine weitere Entwicklung auf diesem Gebiet vorangetrieben wurde.

Bereits 1809 legte Gauß erstmals die Theorie der Beobachtungsfehler dar; in der „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium“ wurde die Aufgabe wie folgt gestellt (zitiert nach Gnedenko 1960, S. 197):

„Bei Messungen von Größen, die mit gleicher Genauigkeit ausgeführt werden, haben die zufälligen Fehler eine differenzierbare Dichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Es soll die Verteilung unter der Voraussetzung bestimmt werden, dass der wahrscheinlichste Wert der gemessenen Größe bei einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen dem arithmetischen Mittel der beobachteten Werte gleich ist.“

Seine Berechnungen führten Gauß zur wohlbekannten Dichtefunktion der Normalverteilung, der Name „Gauß’sches Fehlerverteilungsgesetz“ erhielt seine Grundlage. Eine systematische Darlegung seiner

Theorie der Beobachtungsfehler erschien 1823[2]. Darin beschäftigt sich Gauß zu Beginn mit der Klärung der Tatsache, dass wiederholte Messungen oder Beobachtungen nie völlig gleiche Ergebnisse liefern werden, ganz gleich wie sorgfältig man sie auch durchführt. Astronomen war seit jeher klar, dass unmittelbare Beobachtungsergebnisse fehlerbehaftet sind. Gnedenko berichtet über Tycho de Brahe (1546–1601), der lange vor Gauß zwischen *systematischen* Fehlern, die durch die Wahl der Beobachtungsmethode oder des Messgerätes bedingt sind, und *zufälligen* Messfehlern unterschied (Gnedenko 1960, S. 195). Um diese Fehler auszugleichen, führte er bei wichtigen Beobachtungen mehrere Messungen unter abgeänderten Bedingungen durch und versuchte durch Kombination der Beobachtungsergebnisse auch zufällige Fehler auszuschalten.

Gauß trifft eine ähnliche Einteilung in *reguläre* und *irreguläre* Fehler. Als reguläre Fehler bezeichnet er solche, die sich voraussehen lassen, da sie bei jeder Messung konstant auftreten oder sich während der Messung gesetzmäßig ändern und sich daher vorausberechnen lassen. Irreguläre Fehler sind unregelmäßige und zufällige Fehler, deren Entstehung er mit unregelmäßigen äußeren Einflüssen, wie beispielsweise dem Flimmern der Luft, aber auch mit der Unvollkommenheit unserer Sinnesorgane begründet. Insbesondere merkt Gauß an, dass die Einteilung in reguläre und irreguläre Fehler mitunter relativ ist und davon abhängt, für welche reale Aufgabe die Messungen angestellt werden. In seinen Schriften untersucht und beschreibt Gauß die Verteilung der irregulären Fehler.

In diesem Sinn werden auch in dieser Arbeit Überlegungen zur Fehlerverteilung angestellt, und es wird versucht, durch einen für die Lernenden transparenten, in der Praxis verwurzelten Weg die Brücke von Mess- und Beobachtungsfehlern zur Normalverteilung zu schlagen.

Hingewiesen sei an dieser Stelle auch auf die Arbeit von Teicher, der eine Maximum-Likelihood-Charakterisierung der Normalverteilung vorlegt (Teicher 1961) und jene von Findeisen, der auf Teichers Arbeit Bezug nimmt. Mit dem Anspruch Gauß' Ansatz perfekt auszuarbeiten, charakterisiert Findeisen die Normalverteilung unter noch schwächeren Bedingungen (Findeisen 1982).

3 Die Dichte der Messfehlerverteilung

3.1 Ausgangssituation und praxisnaher Ansatz

Eine bestimmte unbekannte Größe t sei n-mal mit gleichbleibender Sorgfalt gemessen. Dabei treten keine systematischen Messfehler auf, die Abweichung der Messwerte $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vom wahren Wert t sind zufällig und voneinander unabhängig. Wir haben es also mit irregulären Fehlern in Gauß'scher Diktion zu tun.

Den Fehler der i-ten Messung bezeichnen wir mit

$$u_i = t - t_i.$$

Die entscheidende Frage in der Praxis ist nun klarerweise, wie mit den Messergebnissen umzugehen ist, wie also der unbekannte Wert t aus den n Messwerten geschätzt werden kann. Als bewährtes Vorgehen hat es sich etabliert, das arithmetische Mittel $\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}$ als Schätzer für t zu verwenden.

Diesen Ausgangspunkt gilt es mit den Lernenden zu klären, da er für unsere weiteren Überlegungen zentral ist. Wir werden in Abschnitt 4 darauf zurückkommen.

Lässt sich nun aus dieser Vereinbarung, $\bar{t}$ als geeigneten Schätzer zu verwenden, schon eine Aussage über die Verteilung der Fehler u_i machen? Im Folgenden wird gezeigt, dass diese Frage mit „Ja" zu beantworten ist, also diese eine übliche Festlegung bereits die Fehlerverteilung bestimmt.

Entsprechend der Definition des arithmetischen Mittels ist die Forderung, $\bar{t}$ als Schätzer für t zu verwenden, identisch mit der Forderung

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 0.$$

Die (unbekannten) Werte u_i können als Realisierungen von Zufallsvariablen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ angesehen werden. Da alle u_i aus einer Messreihe mit gleichbleibenden Bedingungen stammen, dürfen wir für alle Zufallsvariablen U_i dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit dieselbe Dichtefunktion f annehmen.

3.2 Anforderung an die Dichtefunktion

Diese Dichtefunktion f gilt es nun zu bestimmen. Dazu empfiehlt sich die Maximum-Likelihood-Methode. Sie sollte den Lernenden bereits vertraut sein, was sich meist im Rahmen des Themenkreises „Auffinden von besten Schätzern“ ergibt. Im Vorliegenden haben wir es mit der umgekehrten Problemstellung zu tun: Es ist nicht die Likelihood-Funktion bekannt und der Maximum-Likelihood-Schätzer (M-L-Schätzer) gesucht, sondern man geht davon aus, dass für jeden Stichprobenumfang $n \geq 2$ das arithmetische Mittel $\bar{t}$ der M-L-Schätzer ist und sucht die Likelihood-Funktion. Im stetigen Fall also jene Dichtefunktion, die just an dieser Stelle ein Maximum annimmt.

Entsprechend unseren Ausgangsbedingungen betrachten wir die einzelnen Messergebnisse als voneinander unabhängig, daher sind auch $U_1, U_2, ..., U_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Ihre gemeinsame Dichtefunktion g kann somit als Produkt der Dichtefunktionen der U_i geschrieben werden:

$$g(u_1, u_2, ..., u_n) = f(u_1) \cdot f(u_2) \cdot ... \cdot f(u_n)$$

Im Sinne eines Extremwertproblems differenzieren wir, gehen aber zuvor um rechentechnische Einfachheit bemüht zum Logarithmus über, da sich Summen leichter als Produkte ableiten lassen. Wir betrachten also $\ln g$.

$$\ln g(u_1, u_2, ..., u_n)$$
$$= \ln f(u_1) + \ln f(u_2) + ... + \ln f(u_n)$$

Die Funktion $\ln g$ hat an denselben Stellen wie g ihre Maxima, da wir g als überall positive Dichtefunktion annehmen und ln eine streng monoton wachsende Funktion ist.

Mit $u_i = t - t_i$ erhalten wir damit eine Funktion in t:

$$f(t - t_1) + \ln f(t - t_2) + ... + \ln f(t - t_n) =: h(t)$$

deren erste Ableitung

$$h'(t) = \frac{f'(t - t_1)}{f(t - t_1)} + \frac{f'(t - t_2)}{f(t - t_2)} + ... + \frac{f'(t - t_n)}{f(t - t_n)}$$

ist.

Da wir die Existenz eines Maximums voraussetzen, ergibt sich aus der notwendigen Bedingung $h'(t) = 0$ für das Vorliegen eines Maximums an die Dichtefunktion f die Forderung

$$\frac{f'(u_1)}{f(u_1)} + \frac{f'(u_2)}{f(u_2)} + ... + \frac{f'(u_n)}{f(u_n)} = 0.$$

3.3 Folgerungen mithilfe der Analysis

Zwecks übersichtlicher Zusammenfassung setzen wir

$$\frac{f'(u_i)}{f(u_i)} =: F(u_i).$$

Aus dem Anspruch $\bar{t}$ als M-L-Schätzer für t zu verwenden, ergeben sich also insgesamt zwei Forderungen, die im Folgenden als FD 1 und FD 2 bezeichnet werden:

FD 1: $\quad u_1 + u_2 + ... + u_n = 0$

FD 2: $\quad F(u_1) + F(u_2) + ... + F(u_n) = 0$

Da diese beiden Forderungen unabhängig von der Anzahl der durchgeführten Messungen sind, müssen beide Gleichungen für alle n gelten.

Sei zunächst $n = 2$:

Es folgt aus $-u_1 = u_2$ und $-F(u_1) = F(u_2)$, dass $-F(u_1) = F(-u_1)$, also F eine ungerade Funktion ist.

Für ein beliebiges n betrachtet liefert FD 1:

$$-u_1 = u_2 + u_3 + ... + u_n$$
$$\Rightarrow F(-u_1) = F(u_2 + u_3 + ... + u_n)$$

und FD 2:

$$-F(u_1) = F(u_2) + F(u_3) + ... + F(u_n).$$

Gemeinsam mit der Eigenschaft, dass F eine ungerade Funktion ist, ergibt das

$$F(u_2 + u_3 + ... + u_n) = F(u_2) + F(u_3) + ... + F(u_n)$$

Die Funktion F muss also die Cauchy’sche Funktionalgleichung

$$F(u_i + u_j) = F(u_i) + F(u_j)$$

erfüllen. Cauchy (1789–1857) beschäftigte sich zu jener Zeit, in der Gauß mit der Vermessung des Königreichs Hannover betraut war und seine Theorie der Beobachtungsfehler systematisierte, mit der Bestimmung der auf $\mathbf{R}$ definierten Funktionen, die der Gleichung $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$ genügen.

Er zeigte, dass für stetige Funktionen f genau die linearen Funktionen $f(x) = k \cdot x$ die Lösungen dieser nach ihm benannten Funktionalgleichung bilden. Ein Beweis dafür findet sich in Smital (1988, S. 27 ff.)[3]

Wir verwenden dieses wichtige Ergebnis aus der Analysis und schreiben daher für $F(u_i)$:

$$F(u_i) = k \cdot u_i, \quad k \in \mathbf{R}, \; i = 1, ..., n,$$

woraus sich wegen wegen der Darstellung von F als Quotient $\frac{f'}{f}$ die Differentialgleichungen

$\frac{f'(u_i)}{f(u_i)} = k \cdot u_i, \quad k \in \mathbf{R}, \; i = 1, ..., n$ ergeben.

Die Gestalt von f findet man durch Lösen der einfachen Differentialgleichung

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = k \cdot u, \quad k \in \mathbf{R}, \; u \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \ln|f(u)| = k \cdot \frac{u^2}{2} + C$$

und man erhält schließlich $f(u) = C \cdot e^{k \cdot \frac{u^2}{2}}$.

3.4 Überlegungen zu den Größen *k* und *C*

Zum Faktor k im Exponenten überlegen wir aus zwei Blickwinkeln, zunächst aus anwendungsorientierter Sicht. Da wir es mit nicht systematischen Messfehlern zu tun haben, treten große Abweichungen vom wahren Wert seltener auf als kleine Abweichungen. k muss daher negativ sein.

Auch aus innermathematischer Sicht ist dieser Schluss zu ziehen, da f ja Dichtefunktion ist und daher die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = 1$$

erfüllen muss. Das streichen wir deutlich heraus, indem wir $k = -h^2$ setzen und erhalten damit

$$f(u) = C \cdot e^{-h^2 \cdot \frac{u^2}{2}}.$$

Die **Bestimmung der Integrationskonstante *C*** wird ebenfalls über die Normierungsbedingung geführt. Für C lässt sich daher schreiben:

$$C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \cdot \frac{u^2}{2}}\,du}$$

Das uneigentliche Integral im Nenner

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \cdot \frac{u^2}{2}}\,du$$

ist mit einfachen Integrationsmethoden nicht zu lösen. Eine gängige Berechnungsmethode führt über die Verwendung von Polarkoordinaten und wird beispielsweise in Barth (1988, S. 288 f.) oder Meyer (2004, S. 96 f.) behandelt.

Hier wird eine weitere Möglichkeit zur Berechnung dieses Integrals vorgestellt, weil sie einerseits weniger tief greifende Vorkenntnisse voraussetzt und andererseits den anschaulichen Aspekt mit einbezieht.

Dazu betrachten wir zunächst I^2. Das Produkt der Integrale

$$I^2 := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2} \cdot x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2} \cdot y^2}\,dy,$$

als Doppelintegral geschrieben ergibt

$$I^2 := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2} \cdot x^2} \cdot e^{-\frac{h^2}{2} \cdot y^2}\,dx\,dy$$

bzw.

$$I^2 := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2} \cdot (x^2 + y^2)}\,dx\,dy.$$

Der Integrand lässt sich als Funktion $l(x,y)$ zweier unabhängiger Variablen auffassen und damit geometrisch als Fläche über der *(x,y)*-Ebene interpretieren:

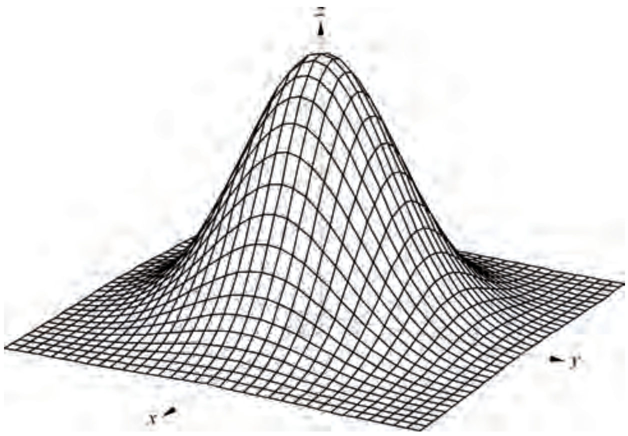

Abbildung 1: Graph der Funktion z = l(x,y)

$z = l(x,y)$ beschreibt eine Fläche, die man sich durch Rotation des Graphen der Funktion $e^{-\frac{h^2}{2} \cdot x^2}$ um die z-Achse entstanden vorstellen kann (siehe Abbildung 1).

Aus $z = e^{-\frac{h^2}{2} \cdot (x^2 + y^2)}$ folgt $-\frac{2}{h^2} \ln z = x^2 + y^2$.

Es liegen also alle Punkte (x, y, z) für ein bestimmtes

$z = \ell(x, y)$ auf einer Kreislinie mit dem Radius

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-\frac{2}{h^2} \ln z},$$

Dabei ist der Ausdruck unter der Wurzel wegen $0 < z \leq 1$ positiv.

Das Doppelintegral

$$I^2 := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2} \cdot (x^2 + y^2)}\,dx\,dy$$

kann man als Volumen jenes Körpers deuten, der durch die Fläche der Funktion $z = l(x,y) = e^{-\frac{h^2}{2} \cdot (x^2 + y^2)}$ und die (x,y)-Ebene begrenzt wird. I^2 lässt sich daher durch Integration über Flächeninhalte von Kreisscheiben parallel zur (x,y)-Ebene, wie in Abbildung 2 dargestellt, quasi als „Summe von Kreisflächen", berechnen.

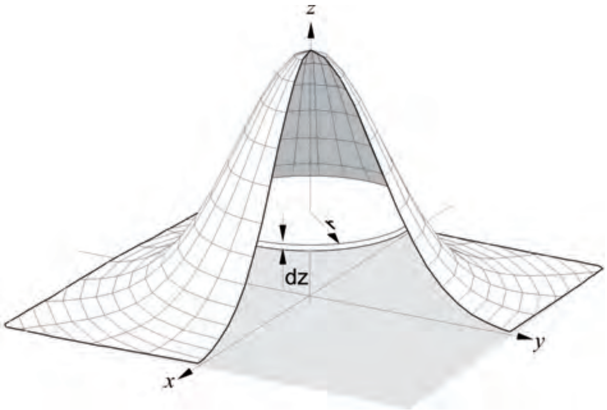

Abbildung 2

Der Flächeninhalt $A(z)$ einer solchen Kreisscheibe beträgt

$$A(z) = r^2\,\pi = -\frac{2}{h^2}\ln z\;\pi\,.$$

Damit gilt

$$I^2 = \int_0^1 A(z)\,dz = -\frac{2}{h^2}\pi\int_0^1 \ln z\,dz.$$

Dieses uneigentliche Integral berechnen wir mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{R\to 0}\left(-\frac{2}{h^2}\pi\int_R^1 \ln z\,dz\right) \\ &= \lim_{R\to 0}\left(-\frac{2}{h^2}\pi\; z(\ln z - 1)\Big|_R^1\right) \\ &= \frac{2}{h^2}\pi + \frac{2}{h^2}\pi\cdot\lim_{R\to 0} R(\ln R - 1) \\ &= \frac{2}{h^2}\pi + \frac{2}{h^2}\pi\cdot\lim_{R\to 0}\frac{\ln R - 1}{\frac{1}{R}} \end{aligned}$$

Die Regel von de l'Hospital liefert

$$= \frac{2}{h^2}\pi + \frac{2}{h^2}\pi\cdot\lim_{R\to 0}\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2}} = \frac{2}{h^2}\pi$$

Damit erhalten wir für das ursprüngliche Integral:

$I = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{|h|}$, womit auch die Konstante C bestimmt ist:

$$C = \frac{|h|}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

3.5 Resümee und Anmerkung

Die soeben gewonnene Lösung

$f(u) = \dfrac{h}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-h^2\cdot\frac{u^2}{2}}$ $(h > 0)$ stellt nun gerade die Dichtefunktion einer $N(0, \frac{1}{h^2})$-verteilten Zufallsvariable dar.

Die Art der Verteilung der Messfehler wurde somit aus einer *einzigen* Annahme, nämlich dass das arithmetische Mittel der M-L-Schätzer für den wahren Wert ist, entwickelt.

Entsprechend der Intention dieses Artikels, die Verbindung zwischen Messfehlern und der Normalverteilung herzustellen, liegt daher das Ergebnis vor. Freilich lassen sich interessante Fragestellungen anknüpfen und beispielsweise Überlegungen zur Größe h, die in die Verteilung eingeht, fortführen. Gauß widmete dieser von ihm als „Genauigkeitsmaß" bezeichneten Größe besonderes Augenmerk.

Entsprechend seiner Bemühungen um einen rationalen Umgang mit Beobachtungsergebnissen in der praktischen Arbeit, betrachtete er die Abschätzung des Genauigkeitsmaßes mithilfe der Messergebnisse auch als eines der wichtigsten Probleme seiner Theorie. Dazu legte er bereits 1816 in der „Zeitschrift für Astronomie" eine Abhandlung vor (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften 1873, S. 109 ff.) und bemerkte dazu im ersten Abschnitt: „Inzwischen ist immer eine Kenntnis dieser Größe selbst interessant und lehrreich, und ich will daher zeigen, wie man durch Beobachtungen selbst zu einer solchen Kenntnis gelangen mag." Eine kurze Zusammenfassung dieser Abhandlung findet sich auch in Gnedenko (1960, S. 198).

4 Didaktischer Kommentar

Bevor ich nun auf einige Punkte des vorangegangenen Abschnitts aus fachdidaktischer Sicht näher eingehen möchte, sei noch einmal betont, dass dieser Artikel nicht darauf abzielt, eine mögliche Einführung der Normalverteilung zu bieten. Im Gegenteil, die Normalverteilung sollte den Lernenden bereits bekannt sein, um ein echtes Verständnis der Ausführungen zu ermöglichen und damit das Wissen um die Normalverteilung zu erweitern. Tietze et al. formulieren im Rahmen allgemein didaktischer Fragen zum Stochastikunterricht: „Daher gehört zu jedem Mathematikunterricht eine Anwendungsorientierung, in der die Leistungen der Mathematik für das Weltverstehen in Bezug auf die Entwicklung der (post-)

industriellen Gesellschaft in einer technisch-wissenschaftlichen Welt vermittelt werden.“ (Tietze et al. 2002, S. 118) Gerade auch diesem Anspruch soll der vorliegende Aufsatz gerecht werden. An selber Stelle wird auch eingeräumt, dass die Realisierung dieses Ziels mit Schwierigkeiten verbunden ist. „Sie liegen in der Komplexität und Schwierigkeit der Sachprobleme selbst, der Datenfülle und der Komplexität und Schwierigkeit der zu verwendenden mathematischen Theorie und Methoden.“

Besonders Letzteres trifft auch im vorliegenden Fall zu. Aufgrund des notwendigen Vorwissens ist der Einsatzbereich insbesondere in der Lehrer(innen)-bildung zu sehen. In der Schule ist von dem erforderlichen Vorwissen in der Regel nicht auszugehen und daher eine Durchführung, die den roten Faden nicht allzu oft verliert, nur bei entsprechender Vorbereitung möglich.

4.1 $\bar{t}$ als M-L-Schätzer

Sämtliche Überlegungen basieren auf der Idee auf das arithmetische Mittel der Messwerte als geeigneten Schätzer zu verwenden. Es wird davon ausgegangen, dass $\bar{t}$ der M-L-Schätzer für den unbekannten wahren Wert ist. Daher ist es essenziell, diese Idee zu thematisieren. Gefragt danach, wie sie aus den Messergebnissen zu einem Schätzwert für den wahren Wert t kämen, schlagen Lernende häufig die Berechnung des arithmetischen Mittels vor. Das mag an verschiedensten Kenntnissen liegen, bei näherer Diskussion stellt sich zumeist heraus, dass sehr wohl auch die Vertrautheit mit diesem statistischen Parameter – ist er doch im Normalfall der erste, den man kennenlernt – entscheidenden Einfluss nimmt. Die Akzeptanz von $\bar{t}$ als am meisten geeigneten Schätzer ist also in der Regel als unproblematisch zu betrachten. Umso mehr gilt es herauszustreichen, dass es eine *ausgewählte* (wenn auch bewährte und begründete) Festlegung ist, die bereits die Fehlerverteilung bestimmt. Denn die Wahl eines anderen Schätzers für die wahre Größe führt zu einer anderen Fehlerverteilung. Als Beispiel sei an dieser Stelle der empirische Median genannt, der zur Laplace-Verteilung als Fehlerverteilung führt (siehe z. B. Meyer 2004, S. 78 ff.).

4.2 Vorwissen aus Stochastik und Analysis

Insbesondere was das stochastische Vorwissen anbelangt, wird hier von den Studierenden einiges an gesicherten Kenntnissen abverlangt. Vor allem das Wissen um Dichtefunktionen wird gefordert, z. B. wenn es darum geht, unter welchen Voraussetzungen die Dichtefunktion einer mehrdimensionalen Zufallsvariable als Produkt geschrieben werden kann. Die Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode in vermutlich nicht ganz vertrauter Weise setzt echtes Verständnis für die grundsätzliche Idee voraus.

Auch in der Analysis wird stellenweise deutlich über Schulniveau hinaus Anleihe genommen. Das gilt für die Cauchy’sche Funktionalgleichung, immerhin ist es aber möglich, sie ohne allzu lange Exkurse darzulegen, so weit sie hier gebraucht wird.

Bei der Bestimmung der Integrationskonstante C wurde eine Möglichkeit vorgestellt, bei der man – etwa im Vergleich zur Berechnung mit Polarkoordinaten – eher mit schulischem Vorwissen auskommt. Dennoch wird eingeräumt, dass die Berechnung praktisch als eigener Inhalt angesehen werden muss, die vom Hauptpfad der Überlegungen wegführt. Alternativ könnte man die Auswertung des uneigentlichen Integrals von einem Computeralgebraprogramm bewerkstelligen lassen. Dabei hängt es natürlich von der Überzeugung jedes/jeder einzelnen/einzelner Lehrenden ab, ob diese Möglichkeit nur dann (etwa aus Zeitgründen) als gerechtfertigt gesehen wird, wenn auch die händische Berechnung vom Vorwissen der Lernenden her möglich wäre oder ob der Computereinsatz zum Umschiffen einer schwierigen Stelle als zulässig angesehen wird.

Das Lösen der Differentialgleichungen und die Überlegungen zur Größe k im vorläufigen Ergebnis sind deutlich einfacher zu bewerkstelligen und können mit schulischem Vorwissen durchgeführt werden.

4.3 Bemerkung zur Unterrichtsmethode

Dem Unterrichtsinhalt entsprechend findet hier, insbesondere in der Anfangsphase, die Methode des fragend-entwickelnden Unterrichts ihre Berechtigung. Gerade wenn es auch um das Herstellen historischer Bezüge geht, kommen die Stärken dieser Unterrichtsmethode zur Geltung. „Klare, abgesicherte Zusammenhänge können in angemessener Fachlichkeit und zudem sinnvoll vorstrukturiert vermittelt werden.“ (Leuders 2001, S. 143)

In weiterer Folge bietet es sich an verschiedenen Stellen an, dass die Lernenden Teilaufgabenstellungen in Einzel- oder Gruppenarbeit bearbeiten. Das können einerseits kurze, kalkülorientierte Aufgaben sein, wie beispielsweise das Lösen der einfachen Differentialgleichung (siehe Abschnitt 3.4).

Andererseits ist auch Raum für problemorientierte Aufgaben. Besonders eignen sich dafür die Überlegungen zu den beiden Größen k und C, daher werden Beispiele aus diesen Abschnitten gegeben.

Im Anschluss an das Lösen der Differentialgleichung, was als Resultat $f(u) = C \cdot e^{k \cdot \frac{u^2}{2}}$ zur Normalverteilungsdichte führt, können mit der Fragestellung „Welche Bedingung lässt sich aus den bisherigen Erkenntnissen für den Faktor k im Exponenten schließen?“ sowohl anwendungsorientierte als auch innermathematische Überlegungen motiviert werden. Jedenfalls erfordert die Bearbeitung der Problemstellung auch eine Reflexion der erarbeiteten Inhalte.

Bei der Bestimmung der Integrationskonstante C sollte der Fokus zunächst darauf gelegt werden, die Idee, über die Normierungsbedingung der Dichtefunktion zu arbeiten, als grundlegend zu erkennen. Das kann durch eine offene Aufgabenstellung geschehen oder aber durch eine Fragestellung, die bereits eine strategische Hilfe enthält, unterstützt werden, wie z. B. „Welche Eigenschaft einer Dichtefunktion kann genutzt werden, um die Integrationskonstante C zu bestimmen?“

Die vorgestellte Methode zur Berechnung des Integrals I (vgl. Abschnitt 3.4) eignet sich meines Erachtens wieder gut für den fragend-entwickelnden Unterricht. Eine computerunterstützte Interpretation passender Grafiken (vgl. Abbildung 1 und 2) bietet sich für eine schüleraktive Reflexion an.

Durch die Länge der Unterrichtseinheit kann der Methodenvielfalt Rechnung getragen werden, in welchem Ausmaß eigenständiges Arbeiten und Problemlösen der Lernenden einfließen kann, hängt natürlich von deren Vorwissen und Fähigkeiten ab.

Literatur

Findeisen P. (1982): Die Charakterisierung der Normalverteilung nach Gauß. In: *Metrika* Vol. 29, S. 55–63.

Gnedenko B. W. (1960): Über die Arbeiten von C. F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Reichardt H. (Hrsg.): *C. F. Gauß Leben und Werk.* Berlin: Verlag Haude und Spener.

Gottwald, S. (1990): *Lexikon bedeutender Mathematiker.* Leipzig: Bibliographisches Institut.

Hauer-Typpelt, P. (2006): Auf experimentell-heuristischem Weg zur Normalverteilung. In: *Stochastik in der Schule* **26** (3), S. 2–10.

Heinhold J. und K. Gaede (1968): *Ingenieur Statistik.* München: R. Oldenbourg Verlag.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften (1873, Hrsg.): *Carl Friedrich Gauß' Werke.* Vierter Band. Göttingen.

Leuders T. (2001): *Qualität im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Meyer J. (2004): *Schulnahe Beweise zum zentralen Grenzwertsatz.* Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Smital J. (1988): *On Functions and Functional Equitations.* Bristol and Philadelphia: Verlag Hilger.

Teicher H. (1961): Maximum Likelihood Characterization of Distributions. In: *The Annals of Mathematical Statistics* Vol. **32** (4), S. 1214–1222 .

Tietze, U., Kilka M. und Wolpers, H. (2002): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

von Waltershausen, W. S. (1856): *Gauss zum Gedächtnis.* Leipzig: Verlag von S. Hirzel. URL: *http://gdz.sub.uni-goettingen.de* (Göttinger Digitalisierungszentrum: Digitalisierte Originalschriften von Gauß), letzter Zugriff: 29.4.2009.

Anschrift der Verfasserin

Petra Hauer-Typpelt
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15
1090 Wien
und
Landstraßer Gymnasium
Kundmanngasse 20–22
1030 Wien
petra.hauer-typpelt@univie.ac.at

---

1 Dabei werden Messfehler als Größen interpretiert, die aus einer Summe voneinander unabhängiger Fehlerkomponenten aufgebaut sind, wobei jede für sich nur einen geringen Einfluss auf den Messfehler hat.

2 „Theoria combinationis observatoriu, erroribus minimis obnoxiae“

3 Einen raschen Zugriff auf die grundlegenden Beweisideen bietet: *http://lsgm.de/KoSemNet/pdf/semmler-05-1.pdf*, S. 1 f.