# Warum es einfacher ist, zwei Personen mit gemeinsamem Geburtstag zu finden als eine Person, deren Geburtstag mit dem eigenen zusammenfällt

Raymond S. Nickerson, Tufts University

Unter Studenten der Wahrscheinlichkeitstheorie ist allgemein bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Personen in einer zufällig ausgewählten Gruppe von 23 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, etwas mehr als 0,5 beträgt. Das ist bemerkenswert, denn im Allgemeinen liegt die Schätzung der dafür nötigen Personenanzahl wesentlich höher, nach Mosteller (1962) ist eine typische Antwort 183, ungefähr die Hälfte der Tage eines Jahres. Weniger bekannt ist, dass die Anzahl der Personen, die zufällig zusammenkommen müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,5 wenigstens eine dieser Personen mit dem Befragten selbst gemeinsam Geburtstag hat, 253 beträgt (Feller 1957). Im folgenden verwende ich die Terminologie von Mosteller (1962), der die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällige Menschen am gleichen Tag Geburtstag haben als das *birthday* Problem bezeichnet und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällige Person am gleichen Tag Geburtstag hat wie eine ganz bestimmte andere Person, als das *birthmate* Problem.

Es ist intuitiv klar, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Personen aus einer Gruppe von $n$ zufälligen Menschen den gleichen Geburtstag haben, mit wachsendem $n$ zunimmt. Ebenso klar ist, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Personen aus einer Gruppe von $n$ zufälligen Personen gemeinsam an einem ganz bestimmten Tag im Jahr Geburtstag haben, mit wachsendem $n$ steigt, wenn auch in einem anderen Maße (Russell 2013). Dass die Zahlen 23 und 253 durch eine kombinatorische Gleichung verknüpft sind, hat bereits Mosteller (1962) gezeigt: 253 ist die mögliche Anzahl an Kombinationen bei einer Auswahl von 2 aus 23, z. B.

$$\binom{23}{2} = \frac{(23)(22)}{2} = 253 .$$

Die Frage, die sich dabei stellt, ist, ob dies nur ein zufälliger Zusammenhang ist oder der Hinweis auf eine interessante mathematische Beziehung.

Vor kurzem wies Falk (in diesem Heft) darauf hin, dass dies kein zufälliger Zusammenhang sei, sondern

 Stochastik in der Schule 35 (2015) 1, S. 32–33

sich vielmehr darin eine Gemeinsamkeit zwischen beiden Problemen (*birthday* Problem und *birthmate* Problem, Anm.) zeige. Nämlich das „was in beiden Problemen betrachtet wird, ist die Anzahl an Paaren, die auf Übereinstimmung bzw. Nichtübereinstimmung geprüft werden“. Daraus folgt, dass für jede Wahrscheinlichkeit $p < 1$, einer der beiden Werte von $n$ aus dem anderen hergeleitet werden kann. Wenn man z. B. weiß, dass für die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}25$ die *birthday* Zahl 15 ist, kann man mit

$$\binom{15}{2} = \frac{(15)(14)}{2}$$

ableiten, dass die *birthmate* Zahl 105 beträgt. Oder umgekehrt, wenn man weiß, dass die *birthmate* Zahl 105 ist, kann man durch die positive Wurzel der quadratischen Gleichung $[x(x-1)]/2 = 105$ die *birthday* Zahl 15 ermitteln.

Falks scharfsinnige Erkenntnis, dass für das *birthday* und das *birthmate* Problem die gleiche Anzahl von Paaren nach Übereinstimmungen überprüft werden, wirft ein sehr erhellendes Licht auf die beiden Probleme. Insbesondere wird dadurch ein kausaler Zusammenhang zwischen den Zahlen, die die für eine angegebene Wahrscheinlichkeit erforderliche Stichprobengröße für beide Fälle beschreiben, offenbar. Die Situation kann in der folgenden Abbildung weiter beleuchtet werden.

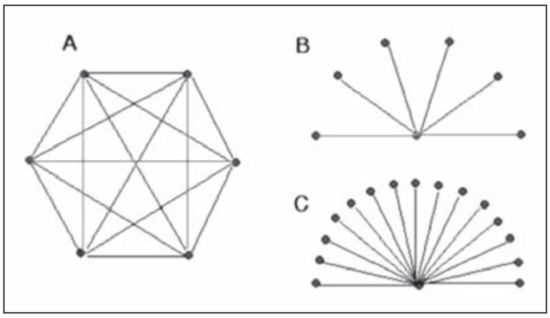


Abb. 1: *birthday* und *birthmate* Problem

Zeichnung A stellt das *birthday* Problem dar. Es zeigt die 15 Paare (d. h. die 15 Linien, die paarweise sechs Punkte verbinden), die überprüft werden müssen, um festzustellen, ob es gemeinsame Geburtstage unter sechs Menschen gibt. Die Zeichnungen B und C, die das *birthmate* Problem darstellen, zeigen alle Wege, die in denen die Geburtstage von 6 bzw. 15 Personen mit dem Geburtstag einer einzigen Person verglichen werden können. Das entscheidende daran ist zu erkennen, dass für die gleiche Anzahl an Paarvergleichen die Zahl der dafür benötigten Personen beim *birthmate* Problem viel größer ist als beim *birthday* Problem. Bei einer Gruppe von $n$ Personen ist die Anzahl der Paare beim *birthday* Problem, bei dem der Geburtstag jeder Person mit dem Geburtstag aller anderen Personen verglichen wird, gleich der Anzahl an Möglichkeiten in denen aus $n$ Personen jeweils 2 ausgewählt werden, d. h.

$$\binom{n}{2} = \frac{(n)(n-1)}{2}.$$

Die Anzahl der Paare, die beim *birthmate* Problem zu berücksichtigen sind, bei dem der Geburtstag jeder Person mit dem Geburtstag einer speziellen Person verglichen wird, ist einfach die Anzahl der Personen in der Gruppe, sagen wir $m$. Die Anzahl an Personenpaaren ist in beiden Fällen (*birthday* und *birthmate* Problem) genau dann gleich, wenn

$$m = \binom{n}{2}$$

gilt. Übrigens, die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei gemeinsame Geburtstage unter sechs zufälligen Menschen zu finden, beträgt *0,04*. Um mit der gleichen Wahrscheinlichkeit beim *birthmate* Problem mindestens zwei Personen mit gleichem Geburtstag zu finden, benötigt man 15 Personen.

### Literatur


Falk, R. (2013). A closer look at the notorious birthday coincidences. *Teaching Statistics.*

Feller, W. (1957). An Introduction to Probability Theory and its Applications (2nd edn, Vol. 1). New York: Wiley. (Originally published in 1950).

Mosteller, F. (1962). Understanding the birthday problem. *The Mathematics Teacher, 55*(5), 322–325.

Russell, M. (2013). Pigeons, Facebook and the birthday problem. *Teaching Statistics, 35*(1), 26–28.


## Vermischtes – Birthday Song

Happy birthday to you--
Bring another 22:
Then we’ll have even chances
Of a match in this room….
Or many more!

Happy birthday to me--
Bring another two-fifty-three:
Then I’ll have even chances
Someone matches with ME….
Or many more!

**Anmerkung:** Lawrence Lesser’s Liedtext „Birthday Song“ wurde erstmals im Winter 2002 in *Stats* veröffentlicht. Eine MP3-Demoversion ist unter der Internetadresse abrufbar: https://www.causeweb.org/resources/fun/db.php?id=49.