Heft 2, Band 3 (1983)

DER BEGRIFF "EREIGNIS" IM STOCHASTIKUNTERRICHT

von L. Hefendehl-Hebeker

> Es muß eine Sicherheit im Umgang mit den Begriffen erreicht werden, wie sie weder vom Forscher noch vom Praktiker einfach entliehen werden kann.
>
> H. Dinges ([5], S. 50)

Zur Entwicklung von Stochastik-Kursen gehören auch die Ausbildung einer für den Schulunterricht geeigneten Sprache und systematische Anleitungen zu deren Gebrauch. Die Verfasserin entwirft ein Konzept zur Erarbeitung des Begriffes "Ereignis", das den Weg vom umgangssprachlichen Verständnis über die fachspezifische Verwendung bis hin zur mengentheoretischen Formalisierung thematisiert.

1. Einleitung

Zur Ausbildung des stochastischen Denkens gehört ein sicherer Umgang mit der Sprache der Stochastik. Eine für den Schulunterricht brauchbare Sprache sollte einfach und konkret sein und, soweit es geht, an natürliche Sprachgewohnheiten der Schüler anknüpfen. Inhaltlich sollte die im Stochastikunterricht verwendete Terminologie einerseits die Denkweisen der Stochastiker widerspiegeln und andererseits helfen, den notwendigerweise beispielorientierten Schulstoff zu strukturieren (s. [4], S. 86). Im allgemeinen reicht es nicht aus, eine hierfür geschaffene Sprache im Unterricht einfach zu benutzen. Sie muß auch thematisiert werden, denn der Schüler braucht Hilfen zum Eingewöhnen, die seine mit den einzuführenden Ausdrücken verbundenen intuitiven Vorstellungen aufnehmen und präzisieren.

Meine ersten Unterrichtserfahrungen zur elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung ließen in mir Zweifel aufkommen, ob die in gängigen Schulbüchern verwendete Terminologie zur Beschreibung von Zufallsexperimenten im Sinne dieser Zielsetzungen bereits hinreichend durchdacht sei. Durch das Urteil eines Fachwissenschaftlers fand ich mich bestätigt.

H. Dinges schreibt ([4], S. 85): "Die Sprache, welche die gängigen Schulbücher über Stochastik entwickeln, ist kaum flexibel genug für ein kompetentes Sprechen über die der Intuition doch sehr naheliegenden Probleme, die z. B. Engel behandelt. Sie scheint auch mehr auf das Fixieren von Definitionen ausgerichtet als darauf, den Schülern die Parallelität gewisser intuitiver Begriffsbildungen einsichtig zu machen."

Konkret wurde diese Einsicht für mich erstmalig während einer auf das Fixieren von Definitionen ausgerichteten Einführungsstunde zum Begriff *Ereignis*.

2. Das auslösende Ereignis

In meinem ersten Kurs über Wahrscheinlichkeitsrechnung - es war ein Grundkurs in der Jahrgangsstufe 11/2 - habe ich den Begriff *Ereignis* eingeführt, wie ich ihn von Forschern einfach entliehen hatte (s. hierzu das Eingangszitat): *Ereignis* als Name für die Teilmengen eines (endlichen) Grundraumes zur Beschreibung eines Zufallsexperimentes.

Gefragt war nach der Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von zwei Würfeln die Augenzahl 7 zu erhalten. Meine Schüler stellten planmäßig fest, daß 6 von den 36 möglichen Wurfbildern die Augensumme 7 haben und daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit daher $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ sei. Diese Beobachtungen wurden in die Mengensprache übersetzt: Der gestellten Bedingung "Augensumme 7" entspricht eine 6-elementige Teilmenge der Menge aller möglichen Wurfbilder. Letztere kann man durch $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ repräsentieren. Wir fertigten eine Tabelle an, in der zu jeder möglichen Augensumme die Menge der günstigen Wurfbilder und die Wahrscheinlichkeit aufgeführt waren. Dann belehrte ich die Schüler darüber, daß man diese Teilmengen von Wurfbildern auch Ereignisse nenne und definierte noch einmal allgemein: "Unter einem *Ereignis* verstehen wir eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω".

Sogleich bekam ich aus den Reihen der Kursteilnehmer das verdiente Echo: "Eine Menge ist ein Ereignis? So etwas Blödes habe ich noch nie gehört!" Die Äußerung stammte von B., einer Schülerin, die mir schon zu Beginn des Kurses freimütig bis frech ihr Desinteresse am Fach Mathematik bekundet und offenbar nicht viel zu verlieren hatte. Ich war in diesem Fall sofort bereit, ihre Reaktion nicht als Indiz für fachliche Inkompetenz, sondern als Zeichen für geistige Gesundheit zu werten (vgl.

[10], S. 235) und räumte ein: "Für den Nichtfachmann muß dieser Sprachgebrauch in der Tat merkwürdig klingen."

Damit war ich auf dem Wege zu dem Eingeständnis, daß mit meiner Einführung etwas nicht stimmen konnte: Unzulängliches war hier Ereignis geworden[1]. Ich hatte dem natürlichen Sprachempfinden meiner Schüler Gewalt angetan, und zwar gleich zweimal. Zum einen hatte ich es versäumt, den "suggestiven Unterton" des Ausdrucks *Ereignis* in der Umgangssprache, den man "nicht so leicht unterdrückt" ([9], S. 441),ernst zu nehmen und entsprechende Hilfestellungen zum Verständnis dessen, was man in der Sprache der Stochastik mit *Ereignis* meint, zu geben. Zum anderen hatte ich die *Ereignisse* genannten Gegenstände stochastischen Denkens viel zu schnell mit ihren möglichen Darstellungen als Mengen identifiziert.

Im folgenden will ich versuchen, diese Versäumnisse im Sinne der Einleitung aufzuarbeiten. Dabei wird nicht grundsätzlich erörtert, ob man gegebenenfalls überhaupt auf die Ereignis-Terminologie verzichten und statt dessen von vorneherein mit stochastischen Variablen arbeiten sollte (s. den Vorschlag von Freudenthal in [9]). Lediglich für den Fall, daß man sich für die Verwendung des Ereignis-Begriffes im Unterricht entscheidet, möchte ich einige Überlegungen zu dessen Behandlung beisteuern.

3. Das Wort "Ereignis" in Umgangssprache und Mathematik

Begebenheiten, die an einer Zufallserscheinung beobachtbar sind, heißen in der Sprache der Stochastik *Ereignis*.

Die ersten, zumeist noch in lateinischer Sprache verfaßten, systematischen Abhandlungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung verwenden hierfür das Substantiv *eventus*, (so z. B. in einem Brief an Pascal an eine Pariser Akademie (s. [18], S. 20), in Huygens' "De Ratociniis in Ludo Aleae" (s. [16], S. 10) und in Bernoullis "Ars Conjectandi" [16]). Dieses hat die breite Bedeutung von: Ausgang, Folge, Erfolg, Entscheidung, Ergebnis, Gescnick (einer Person oder Sache), Begebenheit (s. [11], S. 2487).

---

1) *alles vergängliche ist nur ein gleichnis, das unzulängliche hier wirds ereignis.*
(Goethe; zitiert nach [13], S. 785).

Der deutsche Ausdruck *Ereignis* hatte in der Umgangssprache ursprünglich die neutrale Bedeutung von *Erscheinung, Begebenheit, Vorkomnis*. Im Anschluß an das Substantiv Auge entwickelten sich im Frühneuhochdeutschen zunächst die Substantive *Eräugenung, Ereigenung, Ereignung* im Sinne von "das Sichzeigen". Dann wurde *Ereignis* 1774 von Klopstock als Feminimum neu geschaffen: "auf die Ereignis ('den Fall') hin, daß der Jüngling einst selbsten aufträt und redete." Parallel zu den Substantiven entstand aus *sich eräugen* das Verb *sich ereignen* mit der Bedeutung sich zeigen, sich begeben. An diese Bedeutung schloß sich der Ausdruck *Ereignis* an, wurde Neutrum wie *Begebnis, Erlebnis, Geschehnis* und verdrängte *Ereignung* völlig (s. hierzu [12], S. 217 f.; [13], S. 785).

Heute schwingt in dem Wort *Ereignis* ein suggestiver Unterton mit. Das Duden-Wörterbuch [6] belegt, wie sehr diesem Wort im umgangssprachlichen Verständnis mittlerweile ein Hauch des Besonderen anhaftet. *Ereignis* wird dort beschrieben als "*etwas, was den normalen, alltäglichen Ablauf in bemerkenswerter Weise unterbricht und durch seine Ungewöhnlichkeit auffällt und in Erscheinung tritt: bedeutsamer, denkwürdiger Vorgang, Vorfall, Geschehnis*." Wenn daher eine Sportschau abschließend kommentiert wird mit den Worten: "Diese Sportschau war wieder einmal bis zum Rand voller Ereignisse", so können zu spät am Bildschirm erschienene Fans davon ausgehen, daß sie aufregende Wettkämpfe und überraschende Ergebnisse, vielleicht auch die spektakuläre Entlassung eines Trainers, verpaßt haben.

Im angelsächsischen Sprachraum stellt man eine parallele Entwicklung fest. Das "Oxford English Dictionary" [17] bescheinigt dem an das lateinische *eventus* angelehnten Substantiv *event* zunächst die Grundbedeutung von "anything, that happens or is contemplated as happening; an incident, occurence." Es folgt der Hinweis auf eine Bedeutungsverengung im modernen Sprachgebrauch: "In mod. use chiefly restricted to occurences of some importance; hence colloquial uses such as *quite an event*." (s. hierzu [17], S. 338).

Die Verwendung von *Ereignis* als Fachterminus der Stochastik zur Bezeichnung irgendeiner möglichen Erscheinung, die bei einem Zufallsexperiment unter festgelegten Bedingungen beobachtbar ist, greift auf die Grundbedeutung des Wortes von "das Sichzeigen" zurück. Feller weist in seiner Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie [7] ausdrücklich darauf hin, daß es sich hierbei um eine zum *Zweck* der Vereinheitlichung getroffene Sprachregelung handelt. Zwar habe der Begriff *Ereignis* einen intuitiven Anklang, in der Theorie werde aber letztlich mit ihm gearbeitet wie mit den überall in der Mathematik gebrauchten Begriffen *Punkt* und *Punktmenge* (s. [7], Einleitung).

Diesen von der Wissenschaft zunehmend instrumentalisierten Gebrauch des Begriffs *Ereignis* können Schüler nicht einfach entleihen. Sie müssen bei ihren intuitiven Vorstellungen, die sie mit *Ereignis* verbinden, abgeholt und behutsam zu einer mathematischen Präzisierung hingeführt werden. Die Darstellung der *Ereignisse* genannten Objekte stochastischen Denkens durch Mengen ist ein weiterer Schritt, der erst danach ins Auge gefaßt werden kann.

4. Den Schatten der großen Ereignisse zugunsten der exakten Beobachtung abstreifen

Den Lernprozeß vom umgangssprachlichen Verständnis zur fachspezifischen Bedeutung des Wortes *Ereignis* möchte ich diskutieren, indem ich zu der nachfolgend zitierten Empfehlung von Kütting zur Erarbeitung des Begriffes *Ereignis* in der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung einige differenzierende Anmerkungen mache. Bei Kütting heißt es ([15], S.166): "Im Anfangsunterricht wird man diesen Begriff im Zusammenhang mit Zufallsexperimenten einfach benutzen, ohne ihn zu definieren. Man sagt, dieses ist ein Ereignis, jenes ist ein Ereignis. In ganz natürlicher Weise spricht man von Ereignissen, so wie man im Anfangsunterricht der Geometrie ohne Reflexion über Punkte und Geraden spricht. Als Orientierungshilfe kann die Übereinkunft dienen, alles das als ein Ereignis zu bezeichnen, was bei einem Zufallsexperiment auftreten oder nicht auftreten kann und wonach man bei einem Zufallsexperiment sinnvollerweise fragen kann. Nach dem Versuch muß feststellbar sein, ob das, was als Ereignis bezeichnet wurde, eingetreten ist oder nicht."

Wie in den eingangs zitierten Ausführungen von Dinges klingt auch hier an, daß es nicht auf die schnelle Fixierung von Definitionen ankommt. Die bisher angestellten Überlegungen werfen jedoch die Frage auf, ob das Reden von Ereignissen so unreflektiert geschehen kann, wie es hier behauptet wird.

Meines Erachtens hinkt der gezogene Vergleich zur Geometrie, und zwar aus folgendem Grunde: Die geometrischen Grundbegriffe *Punkt* und *Gerade* haben für Schüler eine leicht erfaßbare, unmittelbar anschauliche Bedeutung, die Punkte und Geraden als natürliche Objekte einer anschauungsgebundenen Geometrie erscheinen läßt. Der Begriff *Punkt* ist primär ein geometrischer Begriff, und seine Verwendung im übertragenen Sinn - etwa in dem Satz: "Das ist ein dunkler Punkt in seinem Leben." - ist der ursprünglichen Bedeutung entlehnt. Der Begriff *Ereignis* dagegen ist kein primär mathematischer Begriff, sondern erfährt in der Mathematik eine entlehnte und zugleich spezialisierte Verwendung, so daß das Bedeutungsgefälle zwischen Umgangssprache und Mathematik hier umgekehrt verläuft. Somit ist die Verwendung für etwas, "wonach man bei einem Zufallsexperiment sinnvollerweise fragen kann," (s. o.) so natürlich nicht und sollte mit den Schülern bewußt thematisiert werden.

Der distanzierte Betrachter würde der Begebenheit, daß beim Werfen eines Würfels die Augenzahl 2 fällt, allenfalls dann den Status eines Ereignisses verleihen, wenn von diesem Wurfergebnis Entscheidendes abhinge. Es hat daher keinen Zweck, den Schülern den Gebrauch des Wortes *Ereignis* als Fachterminus der Wahrscheinlichkeitsrechnung einfach unterschieben zu wollen, wie es im folgenden, in das Kapitel "Zufälliges Ereignis" einführenden Lehrtext geschieht: "Angenommen, beim Werfen eines Würfels interessiert nur, ob das Versuchsergebnis eine ungerade Zahl ist. Wird nun z. B. eine 3 gewürfelt, dann sagt man, das betreffende Ereignis sei eingetreten ..." ([3], S. 9). Das natürliche Sprachempfinden würde sich in dieser Situation eher für Formulierungen wie "das Versuchsergebnis ist positiv" oder "der interessierende Fall ist eingetreten" entscheiden. Einen abweichenden Sprachgebrauch sollte man explizit vereinbaren, etwa so: "Wenn eine dieser Zahlen (gemeint sind die Gewinnzahlen eines Spielers B - Anm. d. Verf.) als Ergebnis auftritt, ist für den Spieler B der *Gewinnfall* eingetreten. Allgemein spricht man statt von dem Gewinnfall von einem Ereignis ..." ([1], S. 29). Auf die Notwendigkeit einer Übereinkunft weist Kütting ausdrücklich hin (s. o.).

Eine Übereinkunft allein reguliert zwar den Sprachgebrauch, schafft aber noch keine Vertrautheit mit demselben. Zumindest der ältere Lernanfänger in bezug auf die Stochastik wird noch eine Weile den Klang von Campbells "Große Ereignisse werfen ihre Schatten voraus" im Ohr behalten, sowie der Tertianer einige Stunden lang schmunzelt, wenn von der n-ten Wurzel gesprochen wird, bis die hier nur durch den äußeren Klang verursachte Reminiszenz an "Enten" verblaßt.

Daher scheint es mir wünschenswert, daß im Unterricht auch dem "suggestiven Unterton" des Wortes *Ereignis*, den man "nicht so schnell unterdrückt" (s. [9], S. 441), Rechnung getragen wird. Fischbein/Pampu/Minzat erwähnen diesen Aspekt in ihrem Erfahrungsbericht zur Einführung in die Wahrscheinlichkeit eher beiläufig (s. [8], S. 143). Möglicherweise empfinden ältere Schüler, die bereits ein ausgeprägtes Sprachgefühl haben, das Reden von *Ereignissen* in der Stochastik gegenüber der Umgangssprache eher als verfremdet denn jüngere.

In einem Differenzierungskurs der Jahrgangsstufe 9 habe ich diesem Aspekt eine Unterrichtsstunde gewidmet. Angeregt durch Beispiele aus der Literatur, wurden die Schüler aufgefordert, Synonyme zu dem Wort *Ereignis* zu suchen und dann selbst Sätze mit dem Wort *Ereignis* zu bilden. Als Synonyme nannten sie "Geschehen, Vorgang, Vorkommnis". Anhand ihrer Sätze wurde ihnen bewußt, daß sie demgegenüber das Wort *Ereignis* meist mit dem Beigeschmack des Besonderen, Großen, Außergewöhnlichen verwenden. Bezogen auf das Zufallsexperiment "Ziehung aus einer Zahlenurne", wurde dann folgende Frage zur Diskussion gestellt: "In der Wahrscheinlichkeitsrechnung nennt man alle Fälle, für deren Wahrscheinlichkeit man sich interessieren kann (z. B. "gerade Zahl", "Primzahl", "keine Zehnerzahl"), *Ereignisse*. Was könnte die Mathematiker zu dieser Wortwahl bewogen haben?" Das Unterrichtsgespräch ergab folgende Gedanken: In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden nicht nur die ungewöhnlichen Fälle *Ereignisse* genannt. Das entspricht dem Anspruch der Mathematik, neutral zu sein und allen denkbaren Fällen, für die sich irgendjemand interessieren könnte, Rechnung zu tragen. Diese Verwendung des Wortes *Ereignis* knüpft daher an die neutrale Grundbedeutung von "Erscheinung", "Begebenheit" an.

Wenn der fachspezifische Sprachgebrauch auf die Grundbedeutung des Wortes *Ereignis* im Sinne von "das Sichzeigen" zurückgreift und so den Hauch des Erlebnisträchtigen zugunsten des exakt Beobachtbaren zurückdrängt, dürfte folgende Nuance in der Formulierung dem Lernanfänger eine zusätzliche Hilfe bieten: Dinges versieht die *Ereignisse* der Stochastik meist mit dem Attribut *beobachtbar* (s. [4]) und zentriert bereits hierdurch die Aufmerksamkeit auf die gemeinten Phänomene. Allerdings muß klargestellt werden, daß sich die Beobachtbarkeit nicht nur auf das (positive) Eintreten, sondern auch auf das Nichteintreten bezieht. Das unmögliche Ereignis ist dasjenige Ereignis, für das man bei jedem Versuchsausgang Nichteintreten beobachtet. Beobachtbar ist hier also nicht im Sinne von "realisierbar" zu verstehen.

Das Attribut *beobachtbar* schlägt zudem die Brücke zu einem weiteren Aspekt. Mathematische Begriffe sind ihrem Wesen nach präzise und in ihrer Bedeutung klar eingegrenzt. Diese Aussage wird man Schülern als leitenden Grundsatz mathematischen Arbeitens vermitteln können. Sie ist offen für den Übergang zwischen verschiedenen Stufen der Exaktheit und bleibt unberührt von der Tatsache, daß schließlich die axiomatische Methode zwischen undefinierten Grundbegriffen und abgeleiteten Begriffen einer Theorie unterscheidet.

Zur Entwicklung des Begriffs *Ereignis* im Stochastikunterricht gehört daher neben einer generellen Verwendungsregel und der Abgrenzung gegenüber dem suggestiven Unterton noch ein Drittes: ein Exaktheitskriterium, das angibt, wann ein Ereignis genau genug beschrieben ist. "Ein beobachtbares Ereignis A in einem Zufallsexperiment gilt uns dann als hinlänglich beschrieben, wenn nach Durchführung des Experiments feststeht, ob dieses Ereignis eingetroffen ist oder nicht". ([4], S. 86). Natürlich hat das Exaktheitskriterium für die Schülerperspektive nur Sinn, soweit auf elementarem Niveau verständliche Beispiele belegen, daß man auch dagegen verstoßen kann.

Es gibt triviale Verletzungen des Exaktheitskriteriums, etwa, wenn es beim Werfen von zwei Würfeln heißt: "Die Augensumme ist klein". Natürlich muß hier exakt abgesteckt werden, was man als "klein" ansehen will.

Es gibt in diesem Zusammenhang aber auch Unzulänglichkeiten auf höherem Niveau. Betrachten wir dazu das Beispiel, mit dem Dinges selbst sein Exaktheitskriterium illustriert: "Das Zufallsexperiment sei: Man würfle so lange, bis die erste 6 kommt. Das Ereignis, daß entweder nie eine 6 kommt oder der erste Wurf eine 6 ergibt oder der vorletzte Wurf eine 5 ergibt, ist ein beobachtbares Ereignis. Dagegen ist das Ereignis, daß im zweiten Wurf eine 6 kommt, nicht beobachtbar. Es könnte nämlich sein, daß der erste Wurf eine 6 ergibt und daher gar nicht zweimal gewürfelt wird." (a.a.O.)

Dazu möchte ich zunächst eine verdeutlichende Anmerkung machen. Wird die Aussage: "Im zweiten Wurf kommt eine 6." aufgefaßt im Sinne von: "Die erste 6 kommt im zweiten Wurf.", so beschreibt sie sehr wohl ein beobachtbares Ereignis. Dieses ist genau dann eingetreten, wenn man im ersten Wurf eine von 6 verschiedene Zahl und im zweiten eine 6 würfelt. Es ist nicht eingetreten, wenn entweder bereits im 1. Wurf eine 6 fällt und daher gar nicht zweimal gewürfelt wird, oder wenn mehr als zweimal gewürfelt wird und frühestens beim 3. Wurf eine 6 fällt. Nach einem Hinweis von A. Kirsch kann die ursprüngliche Formulierung von Dinges leicht im Sinne der genannten Nuance aufgefaßt werden. Der inhaltlichen Fragwürdigkeit ist also ein Verständigungsproblem vorgelagert. Ersetzt man aber die 6 durch eine 5, so erhält man mit: "Im zweiten Wurf kommt eine 5." eine Aussage, die sprachlich weniger deutungsabhängig, inhaltlich jedoch in derselben Weise anfechtbar ist, wie Dinges es schildert. Durch einen geeigneten Zusatz kann sie zu einer hinlänglichen Beschreibung eines beobachtbaren Ereignisses ergänzt werden, etwa so: "Es wird mindestens dreimal gewürfelt, und im zweiten Wurf kommt eine 5."

Das Beispiel von Dinges birgt noch eine über sprachliche Mißverständnisse und inhaltliche Unvollständigkeit hinausgehende grundsätzliche Problematik. Diese hängt mit dem von den Stochastikern als "beobachtbar" zugelassenen Ereignis: "Es kommt nie eine 6." zusammen [ebenfalls nach einem Hinweis von A. Kirsch]. Die praktische Durchführung eines Experimentes mit den genannten Spielregeln, nach dessen Abschluß das Eintreten dieses Ereignisses beobachtet werden kann, verbietet sich aus Zeitgründen. Beobachtbarkeit im Sinne der Stochastik ist also nicht an die praktische Durchführbarkeit und damit die Endlichkeit des zugehörigen Zufallsexperimentes gebunden. Dieser Aspekt dürfte jedoch einen Schüler, der dem konkret-anschaulichen Denken verhaftet ist, überfordern.

Eine endliche Version des zitierten Beispiels scheint mir dagegen für den Stochastikunterricht in der Schule sehr geeignet, etwa in der folgenden Form: "Man würfle so lange, bis die erste 6 kommt, höchstens aber 7 mal." Dieses Zufallsexperiment läßt sich mit Schülern, die über Grundkenntnisse in der elementaren Kombinatorik verfügen, analysieren. Alle oben diskutierten Beschreibungen von Ereignissen können hierfür übernommen werden und die Bedeutung des Exaktheitskriteriums veran-

schaulichen.

5. Zur Darstellung von "Ereignissen" durch Mengen

Für die im elementaren Stochastikunterricht behandelten Zufallsexperimente kann das Ereignisfeld im allgemeinen auf recht natürliche Weise als System von Teilmengen einer geeignet festgelegten Grundmenge von Versuchsausgängen dargestellt werden (vgl. [4]). Es ist oft davor gewarnt worden, diesen Zusammenhang dahingehend zu mißbrauchen, daß ein vorschnell einsetzender mengentheoretischer Formalismus die elementare Stochastik lediglich als Anwendungsgebiet für die Probleme der "Mengenlehre" erscheinen läßt (vgl. [4], [20]).

Ziezold [20] hat sich demgegenüber um ein ausgewogeneres Urteil bemüht und gezeigt, daß mengentheoretische Begriffe nützliche Instrumente sein können, um in der Stochastik Strukturen aufzuzeigen, z. B. dort, wo kombinatorische Hilfsmittel gebraucht werden.

Meine in zwei Kursen erworbenen Unterrichtserfahrungen geben jedoch erneut Kütting Recht, wenn er warnt: "Der Übergang zur symbolischen Repräsentationsebene und eine weitergehende Mathematisierung müssen sehr behutsam angegangen werden. Ereignisse als Mengen, Wahrscheinlichkeiten als Funktionswerte zu deuten und zu beschreiben, machen zwar übergeordnete Gesichtspunkte deutlich; aus der Sicht des lernenden Schülers bedeutet das aber möglicherweise - insbesondere wenn er nicht schon mit den strukturellen Leitbegriffen wie Menge und Abbildung vertraut ist - eine gewisse Unnatürlichkeit und Verfremdung, die der Wahrscheinlichkeitsrechnung vieles von ihrem Reiz und ihrer Ursprünglichkeit nimmt." ([14], S. 105).

Ziezold begnügt sich im Rahmen seiner Ausführungen mit dem Hinweis, diese Schwierigkeiten könnten durch die Behandlung genügend vieler Beispiele behoben werden. Für eine solche Behandlung schlage ich folgende gedankliche Feinstruktur vor:

Gehen wir davon aus, daß der Begriff (*beobachtbares*) *Ereignis* gemäß 4. erarbeitet ist. Für konkret gegebene Zufallsexperimente und konkrete Fragestellungen werden Ereignisse durch Bedingungen an die Versuchsausgänge beschrieben. Ein Ereignis ist genau dann eingetreten, wenn der beobachtete Versuchsausgang die gestellten Bedingungen erfüllt. Ähnlich wie eine Gleichung im zugrundegelegten Zahlbereich eine Lösungsmenge hat, besitzt also ein Ereignis in der festgelegten Grundmenge eine "Erfüllungsmenge", aus der man umgekehrt eine verbale Beschreibung zurückgewinnen kann. Daß diese Menge nach der Wahl der Grundmenge eindeutig bestimmt ist, geht aus den Regeln zur Verwendung des Begriffes *Ereignis* hervor. Man kann daher ein Ereignis auch durch seine "Erfüllungsmenge" darstellen, es sogar mit ihr identifizieren und dann auch der Menge den Namen *Ereignis* geben. Diese Darstellung hat einen entscheidenden Vorteil: Man kann ein Ereignis auf verschiedene Weisen in Worten beschreiben, aber es ist immer dieselbe Menge, die es bestimmt (vgl. etwa [19], S. 180). Umgekehrt können natürlich sprachlich gleich beschriebene Ereignisse u. U. durch verschiedene Mengen repräsentiert werden, wenn die Darstellungsmenge für das Ereignisfeld unterschiedlich angesetzt werden kann.

Flexibilität in der Wahl der Grundmenge kann vorteilhaft sein, was die Transparenz einer Problemstellung und ihrer Lösung angeht. Diese These zusammen mit dem folgenden, sie illustrierenden Beispiel gab H. Dinges der Autorin in einer Diskussion als Ergänzung zu dieser Studie zu bedenken.

Die Aufgabe lautet: Aus einer Urne mit vier Kugeln, welche die Nummern 1 bis 4 tragen, wird zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten Ziehung die Kugel mit der Nummer 2 zu ziehen?

Die Lösung, die der Art der Fragestellung wohl am nächsten liegt, stellt das Gewinnereignis als Teilmenge des Raumes aller geordneten Paare verschiedener Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ dar. Ein zugehöriges Baumdiagramm kann die Gesamtheit der möglichen Versuchsausgänge unmittelbar veranschaulichen. Mit der Produktregel der Kombinatorik errechnet man $4 \cdot 3$ mögliche Versuchsausgänge, alle mit derselben Wahrscheinlichkeit, und davon 3 günstige. Das ergibt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Man kann sich auch vorstellen, daß man viermal ohne Zurücklegen zieht, sich dabei aber nur für die ersten beiden Positionen interessiert. Das Gewinnereignis kann dann durch eine Teilmenge des Raumes aller Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ dargestellt werden. Allerdings beschreibt umgekehrt nicht jede Teilmenge von Permutationen ein beobachtbares Ereignis im Sinne der Aufgabenstellung, denn einer zweimaligen Ziehung entspricht jeweils ein Paar von Permutationen, die in den ersten beiden

Positionen übereinstimmen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist nun die Wahrscheinlichkeit für die Kugel Nr. 2, in die zweite Position zu gelangen. Da jeder Kugel vier mögliche Positionen offenstehen, ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Kugel, in eine vorgegebene Position zu gelangen, offenbar $\frac{1}{4}$. Dies kann durch ein Symmetrie-Argument ohne Rechnung eingesehen werden.

Mancher Schüler wird sich lieber einer Rechnung unterziehen, bis er das Resultat glaubt, und die erste Lösung für die solidere halten. Demgegenüber erfordert die zweite Lösung eine größere Treffsicherheit im Schließen, macht aber die Struktur des Problems durchsichtiger und ermöglicht eine unmittelbare Verallgemeinerung z. B. für die Frage: Aus einer Urne mit n Kugeln, welche die Nummern 1 bis n tragen, wird k-mal ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der k-ten Ziehung die Kugel mit der Nummer k zu ziehen?

6. Ergebnis

Diese Analyse zum Begriff *Ereignis* sollte zeigen, wie wichtig die von Dinges erhobene Forderung nach einem einfühlsamen Umgang mit der Sprache der Stochastik im Schulunterricht ist. Ihre Berücksichtigung trägt dazu bei, daß Lernen (zum) Ereignis werden kann.

Literatur:

[1] Athen, H./ Griesel, H.: Mathematik heute. Grundkurs Stochastik. Hannover: Schroedel 1979

[2] Berg, D./Horn, R./Schmidt, G.: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung G. (Reihe: B. Andelfinger (Hrsg.): Mathematik S-2). Freiburg: Herder 1980

[3] Bosch, K./Wolff, H.: Grundkurs Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Braunschweig: Westermann 1978

[4] Dinges, H.: Zum Unterricht der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 23,1976, S. 83 - 109

[5] Dinges, H.: Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff für die Schule. In: Dörfler, W./Fischer, R. (Hrsg.): Stochastik im Schulunterricht. Wien: Hölder-Pichler-Tempski 1981, S. 49 - 61

[6] Duden. Das große Wörterbuch der deutschen Sprache. In 6 Bänden. Mannheim: Bibliographisches Institut 1976 ff.

[7] Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. New York: Wiley, 3. Aufl. 1968

[8] Fischbein, E./Pampu, I./Minzat, I.: Einführung in die Wahrscheinlichkeit auf der Primarstufe. In: Steiner, H.-G. (Hrsg.): Didaktik der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1978, S. 140 - 160

[9] Freudenthal, H.: Die Crux im Lehrgangsentwurf zur Wahrscheinlichkeitstheorie. In: Steiner, H.-G. (Hrsg.): Didaktik der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1978, S. 436 - 459

[10] Freudenthal, H.: Vorrede zu einer Wissenshcaft vom Mathematikunterricht. München - Wien: Oldenbourg 1978

[11] Georges, K. E.: Ausführliches Lateinisch-Deutsches Handwörterbuch, Band I. Hannover: Hahnsche Buchhandlung, 12. Aufl. 1969

[12] Götze, A. (Hrsg.): Trübners Deutsches Wörterbuch. Zweiter Band. Berlin: De Gruyter 1940

[13] Grimm, J./Grimm, W.: Deutsches Wörterbuch. Dritter Band. Leipzig: Hirzel 1862

[14] Kütting, H.: Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe und Sekundarstufe I. In: Dörfler, W./Fischer, R. (Hrsg.): Stochastik im Schulunterricht. Wien: Hölder-Pichler-Tempski 1981, S. 101 - 106

[15] Kütting, H.: Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg - Basel - Wien: Herder 1981

[16] Naturforschende Gesellschaft in Basel (Hrsg.): Die Werke von Jakob Bernoulli. Band 3. Basel: Birkhäuser 1975

[17] The Oxford English Dicitionary. Band III. Oxford: verb. Neuaufl. 1961

[18] Todhunter, J.: A history of the mathematical theory of probability. New York: Chelsea Publishing Company 1965 (Nachdruck der 1. Aufl. Cambridge 1865)

[19] Winter, H./Ziegler, T. (Hrsg.): Neue Mathematik, 8. Schuljahr. Hannover: Schroedel 1972

[20] Ziezold, H.: Die formale Beschreibung von Zufallsexperimenten durch mengentheoretische Begriffe als Vorstadium stochastischen Denkens. Manuskript, erscheint in: MNU