EINFACHE BEDINGUNGEN FÜR DIE APPROXIMATION DURCH DIE NORMALVERTEILUNG

bearbeitet von Heinz Klaus Strick

Der folgende Aufsatz beruht auf einem Artikel von K. Mc Kelvie, ergänzt durch Leserbriefe von D.Harding und J.Fellman

In vielen Büchern zur Stochastik findet man oft Bedingungen für die Approximation der Poisson- und Binomialverteilungen durch die zugehörigen Normalverteilungen.

In dem folgenden Aufsatz soll gezeigt werden, daß sich diese Bedingungen elementar herleiten lassen.

Für jede Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ beträgt die Wahrscheinlichkeit 99,7 %, daß die Werte der Verteilung im Intervall zwischen $\mu-3\sigma$ und $\mu+3\sigma$ liegen. Wenn die Werte der betrachteten Verteilungen nach unten / und oben beschränkt sind, ist es vernünftig, die Normalverteilung entsprechend durch $\mu - 3\sigma$ bzw. $\mu + 3\sigma$ zu beschränken.

Eine Poisson-Verteilung mit Erwartungswert $\mu = \lambda$ hat die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Die zugehörige Zufallsgröße muß mindestens den Wert 0 haben. Deshalb fordern wir für die approximierende Normalverteilung die Bedingung

$\mu - 3\sigma \geq 0$, also

$\lambda - 3\sqrt{\lambda} \geq 0$ oder $\lambda^2 \geq 9\lambda$, also

$\lambda \geq 9$

Es ist daher nur sinnvoll, die Approximation für die Normalverteilung zu benutzen, wenn der Erwartungswert mindestens 9 ist.

Ist eine Binomialverteilung mit n Stufen und Erfolgswahrscheinlichkeit p gegeben, dann ist der Erwartungswert $\mu = np$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Die zugehörige Zufallsgröße nimmt Werte zwischen 0 und n (einschl.) an. Für die approximierende Normalverteilung müssen deshalb die Bedingungen

$$(1) \quad np - 3\sqrt{np(1-p)} \geq 0$$
$$(2) \quad np + 3\sqrt{np(1-p)} \leq n$$

erfüllt sein.

$$np - 3\sqrt{np(1-p)} \geq 0$$ führt durch Quadrieren

zu

$$n^2p^2 - 9\,np(1-p) \geq 0$$ oder
$$p^2(n+9) - 9\,p \geq 0,$$ also

$$(3) \quad p \geq \frac{9}{n+9} \; := p_L$$

Analog erhält man aus

$$np + 3\sqrt{np(1-p)} \leq n$$
$$n(1-p) \geq 3\sqrt{np(1-p)}$$ und weiter
$$n^2(1-p)^2 \geq 9\,np(1-p),$$ also
$$n(1-p) \geq 9\,p$$ oder

$$(4) \quad p \leq \frac{n}{n+9} \; := p_u$$

Insgesamt muß also gelten

$$(5) \quad \frac{9}{n+9} \leq p \leq \frac{n}{n+9}$$

Das bedeutet z.B., daß für $n = 10$: $0{,}47 \leq p \leq 0{,}53$ bzw. für $n = 20$: $0{,}31 \leq p \leq 0{,}69$

Die o.g. Bedingungen lassen sich auch geometrisch interpretieren. Betrachte an Stelle der Ungleichungen (1), (2) die folgenden Ungleichungen

$$(6) \quad p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \geq 0 \qquad (7) \quad p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq 1.$$

Für ein gegebenes n beschreibt die Gleichung

$$y = p \pm 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

eine Ellipse in der p-y-Ebene die Werte p_l und p_u entsprechen den Schnittpunkten zwischen Ellipse und der p-Achse bzw. der Gerade mit der Gleichung $y = 1$

Liegt p in dem Intervall $]p_l, p_u[$, dann fallen beide Äste der Ellipse in das Einheitsquadrat. Mit wachsendem n verengt sich die Ellipse.

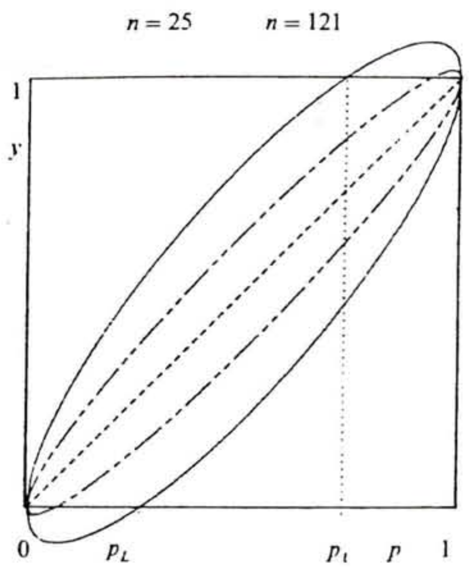

Figure 1

Die Bedingung $p_l < p_u$ ist erfüllt, wenn $n > 9$. Darüberhinaus kann man die Ungleichungen (3), (4) wie folgt schreiben

(3)' $np \geq \frac{9n}{n+9}$ bzw.

$1-p \geq 1 - \frac{n}{n+9}$ also

(4)' $n(1-p) \geq \frac{9n}{n+9}$

Setzt man für n Werte ein, die größer sind als 9, so erhält man die bekannte Faustregel, daß die Approximation zulässig ist, wenn np und n(1-p) größer /gleich 5 sind.

Originaltitel in 'Teaching Statistics', Vol. 5 Nr. 2 (1983

Conditions for normal approximations to known distributions.