AUFGABEN AUS DEM ZENTRALABITUR

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Bayern 1984

In einer Urne befinden sich 2 blaue und 6 weiße Kugeln. Die Kugeln unterscheiden sich nur durch ihre Farbe.

1. Bei einem Zufallsexperiment wird eine Kugel gezogen, ihre Farbe notiert und die Kugel in die Urne zurückgemischt. Dieses Verfahren wird insgesamt sechsmal durchgeführt.

   Als Ergebnisraum eignet sich eine Menge von 6-Tupeln.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   A: = "Die letzte Kugel ist blau",
   B: = "Die erste oder die letzte Kugel ist blau".
   7 BE

   b) Beschreiben Sie das Ereignis $\bar{B}$ in der Umgangssprache und geben Sie $P(A \cap \bar{B})$ an. 7 BE

2. Wie oft müßte man aus obiger Urne mit Zurücklegen mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,5 % mindestens eine blaue Kugel zu erhalten? 5 BE

3. Nun wird das Ziehungsverfahren abgeändert: Nach dem ersten Zug wird nicht nur die gezogene Kugel selbst, sondern noch eine weitere Kugel der gleichen Farbe in die Urne gelegt. Anschließend wird beim zweiten Zug genauso wie beim ersten Zug verfahren, so daß am Ende des Experiments 10 Kugeln in der Urne liegen.

   a) Geben Sie (z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms) alle möglichen Urneninhalte am Ende des Experiments an.
   5 BE

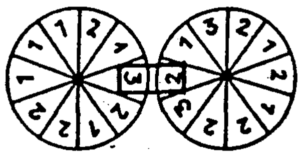
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß sich nach Beendigung des Experiments 3 blaue und 7 weiße Kugeln in der Urne befinden. 5 BE

   c) Sind die Ereignisse E_1: = "Die erste gezogene Kugel ist blau" und E_2: = "Die zweite gezogene Kugel ist weiß" unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung. 5 BE

4. Nun hat jemand eine Urne vor sich, von der er annimmt, daß sich 3 blaue und 7 weiße Kugeln darin befinden. Er zieht 50 mal mit Zurücklegen und glaubt seine Annahme nur dann bestätigt, wenn er mindestens 11, aber nicht mehr als 19 blaue Kugeln erhält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er seine wahre Annahme fälschlicherweise verwirft? 6 BE

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Bayern 1984

In einem Spielautomaten sind zwei Glücksräder nebeneinander montiert. Jedes Rad ist in 10 gleich große Sektoren eingeteilt. In jedem Sektor steht eine Ziffer. Diese Ziffern sind in der Abbildung zu erkennen. Beide Glücksräder werden gedreht. Wenn sie zum Stillstand kommen, erscheint als Ergebnis im Sichtfenster eine zweistellige Zahl, deren Zehnerziffer vom linken und deren Einerziffer vom rechten Glücksrad stammt. Jeder Sektor erscheint mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Sichtfenster.



1. a) Bestimmen Sie alle möglichen Ergebnisse mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. 9 BE

   b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse an:

   A: = "Das Ergebnis ist größer als 20",
   B: = "Das Ergebnis ist eine Primzahl",
   C: = "Das Ergebnis enthält genau einmal die Ziffer 2",
   D: = "Das Ergebnis enthält mindestens einmal die Ziffer 1". 6 BE

   c) Beschreiben Sie möglichst einfach die Ereignisse $C \cap D$ und $C \cup D$ in der Umgangssprache und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten. 5 BE

2. Bei jedem Spiel mit diesem Spielautomaten ist ein Einsatz von 20 Pf zu zahlen. Wenn die Glückszahl 12 erscheint, wirft der Automat 50 Pf aus; bei den anderen Zahlen geschieht nichts.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, von 100 Spielen mindestens 40 zu gewinnen? 6 BE

   b) Wird der Spieler, wenn er häufig genug spielt, insgesamt einen Gewinn oder einen Verlust erleiden?
   Begründen Sie Ihre Antwort. 8 BE

3. Jemand will testen, ob bei dem Spiel von Aufgabe 2 die Gewinnzahl 12 tatsächlich die Wahrscheinlichkeit 0,25 besitzt. Er glaubt, daß dies der Fall ist, wenn er bei 20 Spielen 3, 4, 5, 6 oder 7 mal gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die Gewinnwahrscheinlichkeit 0,25 verwirft, obwohl sie wahr ist? 6 BE

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Bayern 1985

Ein ungewöhnlicher Laplace-Würfel ist mit folgenden Augenzahlen versehen:

In grüner Farbe: 1; 2; 3; 4; in roter Farbe: 1; 2.
Dieser Würfel liegt allen folgenden Aufgaben zugrunde.

1. Der Würfel wird viermal nacheinander geworfen und nur die Augenzahl notiert, die Farbe wird also nicht berücksichtigt.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   A: = "Es werden nur gleiche Zahlen gewürfelt",
   B: = "Es werden nur verschiedene Zahlen gewürfelt".
   10 BE

2. Wie oft muß man mindestens würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens einmal eine rote Augenzahl zu erhalten? 8 BE

3. Der Würfel wird für ein Spiel verwendet: Wird eine rote Augenzahl gewürfelt, so rückt der Spieler um so viele Plätze nach hinten (negativ), wie er Augen gewürfelt hat. Würfelt er grün, so rückt er entsprechend der Augenzahl nach vorn (positiv).

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

   P("Der Spieler ist nach 2 Zügen um k Plätze vom Ausgangspunkt entfernt")
   für die Werte k = -2; -1; 0; 1. 14 BE

4. Um die Laplace-Eigenschaft zu testen, wird folgendes Verfahren vereinbart: Der Würfel wird 100mal geworfen. Falls das Ergebnis "Augenzahl 1 oder 4" weniger als 44mal und mehr als 56mal auftritt, soll dem Würfel die Laplace-Eigenschaft abgesprochen werden.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dem Würfel zu Recht die Laplace-Eigenschaft zugesprochen wird?
   8 BE

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Bayern 1985

1. In einer Urne befinden sich 10 Kugeln. Sie sind mit den Zahlen 1 bis 10 beschriftet und sonst nicht unterscheidbar. Ein Zufallsexperiment besteht darin, gleichzeitig zwei dieser Kugeln zu ziehen und deren Zahlen zu betrachten.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

      A: = "Es werden zwei gerade Zahlen gezogen",
      B: = "Es werden zwei benachbarte Zahlen gezogen",
      C: = "Beide Zahlen sind nicht größer als 6",
      D: = $A \cup C$. 12 BE

b) Das obige Zufallsexperiment wird nun mehrfach mit Zurücklegen wiederholt. Wie oft muß es mindestens durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % bei mindestens einer Ziehung die 10 dabei ist? 7 BE

2. Das Ziehungsverfahren aus Aufgabe 1 wird nun geändert: Eine Kugel wird gezogen, ihre Zahl notiert. Ist die Zahl ungerade, wird die Kugel zurückgelegt und die zweite gezogen. Ist die erste Zahl gerade, folgt die Ziehung der zweiten Kugel, ohne daß die erste zurückgelegt wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E: = "Die erste Zahl ist gerade",
F: = "Die zweite Zahl ist gerade". 7 BE

3. Bei einem Volksfest behauptet der Festwirt, daß die Wahrscheinlichkeit, einen schlecht eingeschenkten Maßkrug zu bekommen, nur 10 % beträgt. Die Behörde will kontrollieren, ob sich der Wirt an diese Aussage hält, und läßt an einem Tag die Füllmenge von 50 zufällig ausgewählten Krügen überprüfen (Stichprobe mit Zurücklegen).

a) Der Wirt will höchstens 3 % Risiko eingehen, irrtümlich zur Rechenschaft gezogen zu werden. Welche Entscheidungsregel schlägt er der Behörde bei deren Stichprobe vor? 7 BE

b) Die Behörde will aber schon bei 7 bemängelten Krügen einschreiten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Wirt zu Unrecht belangt? 7 BE

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Bayern 1984

1. Ein Gerätehersteller führt vor jeder größeren Lieferung folgenden Test durch: Es werden nacheinander Geräte "mit Zurücklegen" geprüft, bis das zweite einwandfreie bzw. das zweite mangelhafte Gerät aufgetreten ist. Im ersten Fall wird die Lieferung freigegeben, im zweiten Fall zurückbehalten.

a) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an. 4
4 BE

b) Schreiben Sie das Ereignis L: = "es wird geliefert" als Teilmenge von Ω . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(L) in Abhängigkeit vom Anteil p mangelhafter Geräte in der Lieferung. 4 BE

(Teilergebnis: $P(L) = (2p+1)(1-p)^2$

c) Weisen Sie mit Methoden der Differentialrechnung nach, daß P(L) mit wachsendem p monoton abnimmt.
3 BE

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit höchstens, daß Lieferungen mit einem Anteil $p \geq 0,2$ von mangelhaften Geräten bei diesem Testverfahren freigegeben werden? 3 BE

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Sendung zurückbehalten, wenn $p = 0,1$ gilt? 2 BE

2. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der nach dem in Teilaufgabe 1 beschriebenen Verfahren zu prüfenden Geräte an.

a) Bestätigen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung
$P(X=2) = 1-2p+2p^2$, $P(X=3) = 2p(1-p)$. 4 BE

b) Zeigen Sie, daß die Verteilung aus Teilaufgabe 2a den Forderungen von Kolmogorow: "nichtnegativ" und "normiert" genügt. 3 BE

c) Weisen Sie nach: $\mathcal{E}(X) = 2\ (1+p-p^2)$. 4 BE

d) Für welchen Wert von p müssen im Durchschnitt die meisten Geräte geprüft werden? Wie viele sind dies?
4 BE

3. Der Empfänger der Geräte möchte die Lieferung nur annehmen, falls der Anteil mangelhafter Geräte $p < 0,2$ ist. Dazu führt er eine Stichprobe vom Umfang 50 (mit Zurücklegen) durch.

a) Wie muß bei einem Signifikanzniveau von 5 % der Annahmebereich für die Nullhypothese H_o: $p \geqq 0,2$ gewählt werden? Dabei soll das Risiko 2. Art möglichst klein sein. 6 BE

b) Berechnen Sie das Risiko 2. Art für $p = 0,1$. 3 BE

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Bayern 1984

Die Seitenflächen eines "gezinkten" Tetraeders sind mit den Ziffern 1,2,3,4 beschriftet. Als Ergebnis X eines Wurfes zählt die Ziffer auf der Grundfläche. Für X gilt die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X=1) = \frac{1}{4},\ P(X=2) = \frac{1}{3},\ P(X=3) = \frac{1}{4},\ P(X=4) = \frac{1}{6}.$$

1. Das Tetraeder wird viemal unabhängig geworfen, und aus den geworfenen Ziffern unter Berücksichtigung der Reihenfolge eine vierstellige Zahl gebildet.

   a) Wie viele verschiedene Zahlen können auftreten?
   2 BE

   b) Wie viele Zahlen mit drei gleichen Ziffern sind möglich? 3 BE

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt eine Zahl mit vier verschiedenen Ziffern auf? 4 BE

2. Ein Spiel besteht im einmaligen Werfen des Tetraeders. Der Reingewinn G_c errechnet sich durch
$G_c := 2X - c$,

   a) Berechnen Sie zunächst Erwartungswert und Varianz von X. 5 BE

   b) Erstellen Sie für $G_5 = 2X - 5$ ein Strichdiagramm und den Graphen der Verteilungsfunktion. 4 BE

   c) Welcher Gewinn oder Verlust ist pro Spiel für $c = 5$ zu erwarten? 3 BE

d) Für welchen Wert von c ist das Spiel fair? 2 BE

3. Jetzt werden Serien von n unabhängigen Würfen mit dem Tetraeder betrachtet. Die neue Zufallsgröße sei das arithmetische Mittel $\bar{X}$ von n geworfenen Ziffern.

   a) Errechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße $\bar{X}$. 5 BE

   b) Ab wieviel Würfen weicht $\bar{X}$ mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90 % um höchstens 0,1 von seinem Erwartungswert ab? Geben Sie eine Abschätzung nach Tschebyschow. 5 BE

4. Mit Hilfe eines Tests soll überprüft werden, ob die Ziffer 4 tatsächlich seltener auftritt als bei einem Laplace-Tetraeder. Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit kann die Hypothese, daß es sich um ein Laplace-Tetraeder handelt, abgelehnt werden, wenn als Ablehnungsbereich "höchstens 54 mal die Ziffer 4" bei 240 Würfen vereinbart wird? 7 BE

   (Annäherung durch Normalverteilung.)

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Bayern 1985

Beim Spiel "Werfen von Sechsen" werden drei gleichartige Laplace-Würfel gleichzeitig geworfen. Jeder Würfel, der bei diesem Wurf eine "6" zeigt, bleibt liegen. Mit den anderen Würfeln wird (falls nicht alle drei Würfel schon beim ersten Wurf "6" zeigen) ein zweites Mal gleichzeitig geworfen. Dann ist das Spiel zu Ende.

1. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der bei diesem Spiel geworfenen Sechsen. Zeichnen Sie ein übersichtliches Baumdiagramm zu diesem Spiel, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X auf Promille genau. 20 BE

2. Max schlägt seinem Freund Otto für das Spiel "Werfen von Sechsen" folgende Regelung vor:

   Otto zahlt an Max 2 DM Einsatz. Tritt beim Spiel das Ereignis A: "Die Würfel zeigen mindestens eine Sechs" auf, so zahlt Max an Otto den Betrag a DM aus. Andernfalls behält Max den Einsatz. Wie groß muß a sein, damit Max im Mittel pro Spiel 0,50 DM gewinnt? Rechnen Sie zur Vereinfachung mit $P(A) = \frac{2}{3}$. 4 BE

3. Drei neue Würfel werden getestet, indem man das Spiel "Werfen von Sechsen" 500 mal durchführt. Berechnen Sie einen möglichst großen Ablehnungsbereich $[0; k_1] \cup [k_2; 500]$ so, daß die Hypothese "$P(A) = \frac{2}{3}$" in jedem Teilbereich mit höchstens 2,5 % Wahrscheinlichkeit irrtümlich abgelehnt wird.

   Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung. 10 BE

4. Am Ende des Spiels "Werfen von Sechsen" liegen immer drei Würfel auf, bei denen keine Reihenfolge erkennbar ist. Wie viele voneinander verschiedene Augenzahlkombinationen sind möglich? 6 BE

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Bayern 1985

Auf einer belebten Straße soll der Anteil p der Autolenker untersucht werden, die während der Fahrt keinen Sicherheitsgurt tragen (sog. Gurtmuffel). Es wird angenommen, daß die Autolenker unabhängig voneinander den Gurt anlegen oder nicht anlegen.

1. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 10 vorbeifahrenden Autos

   a) nur das 3. und das 5. Auto von einem Gurtmuffel gelenkt wird. 2 BE

   b) die ersten vier Autos von keinem Gurtmuffel gelenkt werden, aber trotzdem unter den 10 Fahrern genau zwei Gurtmuffel sind. 4 BE

2. Wie groß muß der Anteil der Gurtmuffel mindestens sein, wenn unter 10 vorbeifahrenden Autos mit mehr als 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens eines von einem Gurtmuffel gelenkt wird?

   Berechnen Sie diesen Anteil auf Promille genau. 6 BE

3. Wie viele Autos muß man mindestens überprüfen, um den Anteil der Gurtmuffel mit einer Abweichung von höchstens 0,02 und einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von mindestens 95 % feststellen zu können?

   Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebyschow, und beachten Sie dabei $p(1-p) \leqq \frac{1}{4}$. 6 BE

4. Es werden 200 Autos auf einer Straße mit dem bekannten Gurtmuffelanteil p = 15 % überprüft. X ist die Anzahl der dabei entdeckten Gurtmuffel. Bestimmen Sie mit Hilfe der Binomialtabellen einen möglichst kleinen Bereich symmetrisch um den Erwartungswert von X, in dem die Zahl der entdeckten Gurtmuffel mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit liegt. 7 BE

5. Bei einem bekannten Anteil p = 15 % kontrolliert man die vorbeifahrenden Autos so lange, bis man einen Gurtmuffel entdeckt, höchstens aber 10 Autos. Z ist die Anzahl der bei diesem Vorgehen kontrollierten Autos.

   a) Bestimmen Sie P (Z=6) und P (Z=10). 4 BE

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man mindestens 6 Autos überprüfen muß? 4 BE

6. Die örtliche Polizei will verstärkte Kontrollen durchführen, wenn in ihrer Stadt der Anteil der Gurtmuffel mehr als 15 % beträgt. Dazu überprüft sie an einer Straße 1000 Autos. Bestimmen Sie für die Nullhypothese "Es sind keine verstärkten Kontrollen notwendig" einen möglichst großen Ablehnungsbereich auf dem Signifikanzniveau 5 %.

   Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.
   7 BE

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1984

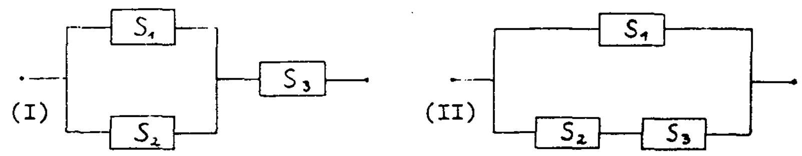
Auf der Fertigungsstraße einer Firma werden in großer Zahl Schalter hergestellt, die mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ intakt sind.

a) Der laufenden Fertigung werden 20 Schalter zufällig entnommen.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: Alle ausgewählten Schalter sind intakt
B: Mindestens 15 Schalter sind intakt
C: Höchstens 2 der ausgewählten Schalter sind defekt.

b) Berechne den Erwartungswert für die Anzahl der defekten Schalter bei Stichproben vom Umfang 20.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der defekten Schalter dabei um höchstens 1 vom Erwartungswert ab?

c) Nach längerer Betriebsdauer besteht der Verdacht, daß der Anteil defekter Schalter zugenommen hat. Um zu überprüfen, ob die Fertigungsstraße immer noch 10 % defekte Schalter liefert, wird der Produktion eine Stichprobe vom Umfang 20 entnommen.
Dabei erhält man 6 defekte Schalter.
Wie wird bei der Irrtumswahrscheinlichkeit 5 % entschieden?

d) Drei Schalter werden in eine Maschine eingebaut.
Zur Wahl stehen die beiden folgenden Möglichkeiten:

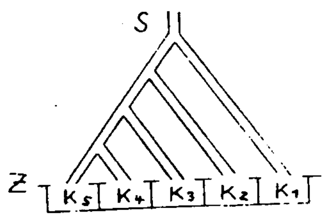


Mit welcher der beiden Schaltungen arbeitet die Maschine zuverlässiger, wenn die Schalter voneinander unabhängig sind?

Zeige, daß das Ergebnis für alle p $(0 < p < 1)$ gilt.

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1984

In einem Spielautomaten bewegt sich eine Kugel vom Start S zur Ziellinie Z und erreicht hierbei eine der Kammern $K_1, \ldots, K_5$. An jeder V erzweigung bewegt sich die Kugel mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 nach links bzw. nach rechts. Ein Spieler hat gewonnen, wenn die Kugel die Kammer K_1 erreicht.



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_i, mit der die Kugel die Kammer K_i $(1 \leqq i \leqq 5)$ erreicht.

b) Ein Spieler macht 10 Spiele.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er höchstens 5 Spiele?

Wie viele Spiele muß der Spieler mindestens machen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 %
A: mindestens ein Spiel
B: mindestens zwei Spiele (Mathematische Tafel!)
zu gewinnen?

c) Ein Spieler will 20 Spiele machen.
Berechne den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ für die Anzahl der hierbei gewonnenen Spiele.

Gib für 20 durchzuführende Spiele ein möglichst kleines, zum Erwartungswert μ symmetrisches Intervall an, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % die Anzahl der gewonnenen Spiele liegt.

d) Eine Kommission prüft den Automaten. Sie will ihn beanstanden, wenn sie bei 20 Spielen mehr als 14 Spiele verliert, da sie in diesem Fall eine Gewinnwahrscheinlichkeit kleiner als 0,5 annimmt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit beanstandet die Kommission irrtümlich den Automaten, obwohl die Gewinnwahrscheinlichkeit tatsächlich 0,5 beträgt?

GK-Aufgabe
Zentralabitur Baden-Württemberg 1984

Man hat festgestellt, daß medizinisch wertlose Tabletten ("Placebos") bei vielen Patienten die gleiche Wirkung erzielen wie gleichaussehende echte Tabletten.

a) In einer Klinik bekommt ein Patient zur Beruhigung zwei Tabletten. Die Schwester nimmt diese beiden Tabletten nacheinander zufällig aus einer Schachtel, in der 5 Beruhigungstabletten und 1 Placebo sind.

   Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

   A: Beide Tabletten sind echt
   B: Nur die erste Tablette ist echt
   C: Eine der beiden Tabletten ist das Placebo.

b) Von 6 echten Tabletten werden 2, 3 oder 4 durch Placebos ersetzt. Berechne für diese drei Fälle:
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt der Patient bei 2 verabreichten Tabletten mindestens ein Placebo?

   Wie viele der 6 echten Tabletten müssen also durch Placebos ersetzt werden, damit der Patient mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % ein oder zwei Placebos erhält?

c) In der Klinik weiß man, daß 60 % derjenigen Patienten, die Beruhigungsmittel nehmen, auf Placebos ansprechen.

   Wie viele Patienten, die Beruhigungstabletten nehmen, müßte man untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens einen unter ihnen zu finden, der auf Placebos anspricht?

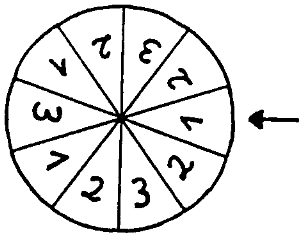
d) Ein Arzt der Klinik vertritt die Meinung, daß der in Teilaufgabe c) beschriebene Anteil p erhöht werden kann, wenn man Placebos mit ausgesprochen bitterem Geschmack verwendet.

   Er gibt dazu 20 Patienten die neuen Placebos und stellt fest, daß 15 von ihnen ansprechen.

   Muß daraufhin die Nullhypothese H_o: $p = 0{,}6$ verworfen werden?
   (Irrtumswahrscheinlichkeit 2 %)

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1985

Bei einem Glücksrad (s. Figur 1) tritt jeder der 10 Sektoren mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 auf. Bei einem Spiel wird das Glücksrad gedreht und die angezeigte Ziffer abgelesen.



Figur 1

a) Es werden 3 Spiele durchgeführt.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: Drei gleiche Ziffern
B: Drei verschiedene Ziffern
C: Alle sonstigen Kombinationen.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 20 Spielen höchstens 6mal die Ziffer 2 auftritt?

Wie ist die Anzahl der Spiele zu wählen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % mindestens einmal die Ziffer 2 auftritt?

c) Durch eine Serie von 20 Spielen soll überprüft werden, ob die Ziffer 2 tatsächlich mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 erhalten wird. Bestimme den Ablehnungsbereich für die absolute Häufigkeit der Ziffer 2,

wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit 10 % beträgt.

d) Mit Hilfe des Glücksrades wird die Bewegung eines Spielsteins auf dem Spielfeld (s. Figur 2) nach folgender Regel gesteuert:
Ist die erhaltene Ziffer 2, so wird der Stein um ein Feld nach rechts gerückt, andernfalls um ein Feld nach links. Ist eines der beiden Zielfelder erreicht, wird abgebrochen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen eines der beiden Zielfelder bei höchstens 6 Spielen.

Ziel 1						Start				Ziel 2

Figur 2

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden -Württemberg 1985

Ein Tetraeder trägt auf seinen vier Begrenzungsflächen die Zahlen 1, 2, 3 und 4. Es gilt die Zahl als geworfen, die sich auf der unten liegenden Fläche befindet. Alle Zahlen treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf. Man wirft zweimal. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: Die Zahl des ersten Wurfes ist kleiner als 3, die Zahl des zweiten Wurfes ist ungerade

B: Die Summe der beiden geworfenen Zahlen ist ungerade

C: Die Summe der beiden geworfenen Zahlen ist mindestens 6.

a) Gib eine geeignete Ausgangsmenge an und berechne die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C, B oder C, weder B noch C.

b) Zeige, daß die Ereignisse A, B unabhängig und die Ereignisse A, C abhängig sind.

c) Man benützt das Tetraeder zu einem Glücksspiel.

Ist bei zweimaligem Werfen die Zahlensumme 3 oder 7, so erhält man einen Gewinn; in allen übrigen Fällen erhält man nichts.
Dieses Spiel wird wiederholt 20mal durchgeführt.

Wie viele Gewinnspiele je 20er-Serie sind im Durchschnitt zu erwarten?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 20 Spielen das 1. und 5. Spiel gewonnen werden und die anderen

Spiele nicht?

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß genau zwei von 20 Spielen gewonnen werden.

Wie oft muß man das Spiel durchführen, damit die Wahrscheinlichkeit, keinen Gewinn zu erzielen, höchstens 5 % beträgt?

d) Bei dem verwendeten Tetraeder soll die Hypothese H_0: Mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 erhält man eine gerade Zahl mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang 20 getestet werden.

H_0 wird abgelehnt, wenn weniger als 6 oder mehr als 14 gerade Zahlen auftreten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese H_0 abzulehnen, obwohl sie zutrifft?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese H_0 fälschlicherweise nicht zu verwerfen, wenn "gerade Zahl" mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 auftritt?

GK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1985

Drei unabhängig voneinander arbeitende Bauteile T_1, T_2 und T_3 fallen mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0{,}05$; $p_2 = 0{,}1$ und $p_3 = 0{,}15$ aus.

a) Ein Gerät G_1 mit den Bauteilen T_1, T_2 und T_3 arbeitet, wenn keines der drei Bauteile ausfällt.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse

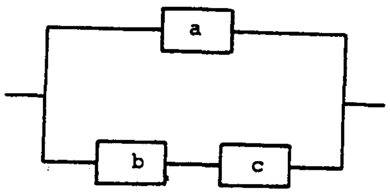
A: Das Gerät G_1 fällt aus
B: Genau eines der drei Bauteile fällt aus.

b) Ein Gerät G_2 mit den Bauteilen T_1, T_2 und T_3 arbeitet, wenn mindestens eines der drei Bauteile arbeitet.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt das Gerät G_2 aus?

c) Bei einem Gerät G_3 sollen T_1, T_2 und T_3 an den drei Stellen a, b und c eingebaut werden (s. Abbildung). Damit G_3 arbeitet, muß sich an der Stelle a oder an den Stellen b und c ein intaktes Bauteil befinden.

Wie muß man die drei Bauteile auf die drei Stellen verteilen, damit die Ausfallwahrscheinlichkeit von G_3 möglichst klein ist?
Wie groß ist sie in diesem Fall?



d) Ein Abnehmer der Bauteile hat den Verdacht, daß bei T_2 die Versagerquote höher als 10 % ist. In einem Test wird dieser Verdacht an 100 Bauteilen überprüft.

Wie lauten die Hypothesen?

Bestimme den Ablehnungsbereich für die Irrtumswahrscheinlichkeit 2 %. Wie wird aufgrund der Stichprobe entschieden, wenn 19 der überprüften Bauteile defekt sind?

Welcher Fehler kann bei dieser Entscheidung begangen werden?

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1984

Eine Firma stellt aus drei Bauteilen T_1, T_2 und T_3 Kassettenrecorder her. Dabei sind die Teile T_1 und T_2 mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = p_2 = 0{,}02$, der Teil T_3 mit der Wahrscheinlichkeit $p_3 = 0{,}02$ unabhängig voneinander defekt. Ein Recorder ist defekt, wenn mindestens einer der drei Bauteile defekt ist.

a) Der laufenden Produktion wird ein Recorder zufällig entnommen.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A: Der Recorder arbeitet einwandfrei
B: Es ist genau ein Bauteil defekt
C: Sowohl T_1 als auch T_3 sind defekt
D: T_1 oder T_2 sind einwandfrei
E: Mindestens zwei Bauteile sind einwandfrei.

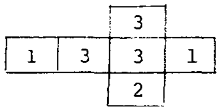
b) In der Praxis geht man davon aus, daß im Falle eines defekten Recorders nur ein Bauteil defekt ist.
Wie läßt sich diese Annahme durch Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit rechtfertigen?

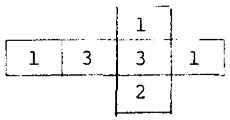
c) Das Werk gibt an, daß nach der Endkontrolle höchstens 2 % der Geräte defekt sind.
Eine große Ladenkette möchte diese Kassettenrecorder als Sonderangebot in ihren Läden verkaufen, falls tatsächlich höchstens 2 % Reklamationen zu erwarten sind. Sie läßt daher 30 Geräte prüfen. Dabei werden zwei defekte Geräte festgestellt. Spricht dies bei der Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 gegen die Behauptung des Werks?

d) Die Bandgeschwindigkeit der Recorder ist bei korrekter Einstellung näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert 4,75 (cm/s) und der Standardabweichung 0,04 (cm/s).
Bei einer Kontrolluntersuchung an 50 Geräten wird bei gleicher Standardabweichung jedoch eine mittlere Bandgeschwindigkeit von 4,73 (cm/s) gemessen.
Prüfe durch einen einseitigen Test, ob sich die Bandgeschwindigkeit signifikant verringert hat (Irrtumswahrscheinlichkeit 1 %).

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1984

Zwei ideale Würfel W_1 und W_2 haben folgende Netze:

W_1: 

W_2: 

a) Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 beschreiben die Augenzahl beim einmaligen Werfen mit dem W_1- bzw. W_2-Würfel.
Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von X_1 und von X_2.

Die Zufallsvariable X beschreibe die Augensumme beim gleichzeitigen Wurf mit einem W_1- und einem W_2-Würfel.

Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung, den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibe die Augensumme beim gleichzeitigen Wurf mit zwei W_1- und zwei W_2-Würfeln.
Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y.

c) Die Zufallsvariable Z beschreibe die Augensumme beim gleichzeitigen Wurf mit 15 W_1- und 30 W_2-Würfeln.

Bestimme ein möglichst kleines, um E(Z) symmetrisches Intervall J, so daß Z mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % einen Wert aus J annimmt. (Approximiere mit der Normalverteilung.)

d) Mit Hilfe eines Computerprogramms soll ein W_1 -Würfel simuliert werden.
Zur Überprüfung der Nullhypothese

H_o: "Der elektronische Würfel hat den Augenzahlerwartungswert $\frac{13}{6}$"

macht man eine Stichprobe im Umfang von 6000 elektronischen "Würfen" mit folgendem Ergebnis:

Augenzahl	1	2	3
Häufigkeit	2060	1008	2932

Kann danach H_o mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % verworfen werden? (Zweiseitiger Test)

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1984

In amerikanischen Glücksspielstädten ist das "3-Glocken-Spiel" verbreitet. Dabei enthält ein solcher Spielautomat drei Glücksräder, die nach Einwurf von 2 Dollar gestartet und unabhängig voneinander gestoppt werden.

Jedes Glücksrad enthält 10 Bilder: 6 Äpfel, 3 Birnen und eine Glocke. Jedes Bild erscheint mit der gleichen Wahrscheinlichkeit im entsprechenden Anzeigefenster.

a) Nach einmaligem Spiel werden die drei Bilder festgestellt.

Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

a A: Jedes Rad zeigt einen Apfel
B: Genau ein Rad zeigt eine Birne
C: Die drei Räder zeigen verschiedene Bilder ("Serie").

b) Zum 3-Glocken-Spiel gehört der folgende Auszahlungsplan:

Anzeige	3 Äpfel	3 Birnen	3 Glocken	Serie	sonst.
Auszahlung (in Dollar)	1	8	352	2	0

Die Zufallsvariable Z beschreibe die Auszahlung für ein Spiel. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z in Form einer Tabelle an.

Berechne E(Z) und V(Z).

c) Zeige, daß bei diesem Spielautomaten die Wahrscheinlichkeit für eine positive Auszahlung 35,2 % beträgt.

Man beobachtet bei 250 Spielen 70 positive Auszahlungen. Sollte man daraufhin an der Mechanik der Automaten zweifeln? (Irrtumswahrscheinlichkeit 5 %; zweiseitiger Test)

d) Der Gewinn des Automatenbesitzers bei einem Spiel errechnet sich aus dem Einsatz von 2 Dollar und der Auszahlung Z nach dem oben beschriebenen Plan.

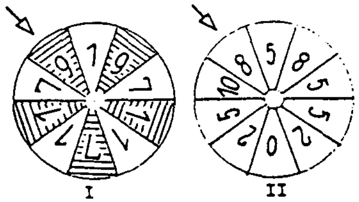
Die Zufallsvariable X bezeichne die Gewinnsumme bei n unabhängigen Spielen.

Zeige: Es gilt $E(X) = n\,(2 - E(Z))$ und $V(X) = n\,V(Z)$.

Wie oft muß gespielt werden, damit die zugehörige Gewinnsumme mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % positiv ist? (Approximiere mit $\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.)

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1985

1. Bei den Glücksrädern I und II erscheint jedes Feld mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 0,1.



a) X sei die Zufallsvariable für die angezeigte Zahl beim Glücksrad I.

   Berechne Erwartungswert und Varianz von X.

   Das Glücksrad I wird wiederholt 6mal gedreht.

   Wie groß ist die durchschnittlich zu erwartende Summe der sechs abgelesenen Zahlen?

   Bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß beim 6maligen Drehen 4mal die "1" und je 1mal die "7" und die "9" auftreten.

b) Das Glücksrad I soll so oft gedreht werden, bis die Summe der auftretenden Zahlen mindestens 7 ist. Z beschreibe die Anzahl der benötigten Drehungen.

   Gib mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z an.

   Wie viele Drehungen sind im Durchschnitt notwendig, um mindestens die Summe 7 zu erreichen?

c) Y sei die Zufallsvariable für die angezeigte Zahl beim Glücksrad II. Die beiden Glücksräder werden unabhängig voneinander gedreht.

   Gib die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und Y an.

   Ein Spieler A dreht das Glücksrad I, ein Spieler B das Glücksrad II. Gewonnen hat der Spieler mit der höheren Zahl; als Gewinn erhält er vom anderen Spieler die von diesem erzielte Zahl in DM ausbezahlt.

   Berechne die Gewinnerwartung des Spielers A.

   Welcher Spieler hat die größere Gewinnerwartung?

d) Jemand hat den Verdacht, daß beim Glücksrad I der Zeiger nicht mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 auf ein weißes Feld zeigt. Zur Überprüfung wird dieses Glücksrad 1000mal gedreht. Bestimme den Ablehnungsbereich für die Anzahl der weißen Felder bei der Irrtumswahrscheinlichkeit 10 %.

   Wie wird aufgrund einer Stichprobe vom Umfang 1000 entschieden, wenn sich 522mal ein weißes Feld ergibt?

   Welcher Fehler kann bei dieser Entscheidung begangen werden?

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1985

a) Fünf ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

A: Die Würfel zeigen die gleiche Augenzahl
B: Alle Würfel zeigen verschiedene Augenzahlen
C: Die Würfel zeigen entweder die Augenzahlen 1; 2; 3; 4; 5 oder die Augenzahlen 2; 3; 4; 5; 6.

b) Ein idealer Würfel wird 10mal geworfen. X beschreibe die Anzahl der dabei auftretenden Sechsen.

Berechne den Erwartungswert μ_X und die Varianz σ_X^2.

Ermittle diejenigen Werte von X, welche im Intervall $[\mu_X - 3\sigma_X; \mu_X + 3\sigma_X]$ liegen.

Der Würfel wird n-mal geworfen. Y beschreibe die Anzahl der dabei auftretenden Sechsen.

Wie groß muß n mindestens sein, damit das Intervall $[\mu_Y - 3\sigma_Y; \mu_Y + 3\sigma_Y]$ im Intervall $[0;n]$ enthalten ist?

c) Um zu untersuchen, ob bei einem gegebenen Würfel die Augenzahl 6 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auftritt, wird dieser 300mal geworfen.

Wie lauten die Hypothesen?

Welche Zufallsvariable wird bei diesem Test betrachtet?

Wie ist diese Zufallsvariable bei zutreffender Nullhypothese verteilt?

Bestimme den Ablehnungsbereich für die Irrtumswahrscheinlichkeit 5 %.

Wie wird aufgrund einer Stichprobe vom Umfang 300 entschieden, wenn 60 Sechsen auftreten?

Welcher Fehler kann bei dieser Entscheidung begangen werden?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler, wenn die Wahrscheinlichkeit für Sechs 0,2 beträgt?

d) Ein idealer Würfel wird 450mal geworfen. Dabei beschreibe die Zufallsvariable Z die relative Häufigkeit der Augenzahl 6.

Berechne näherungsweise den zu μ_Z symmetrischen Bereich, in den die relative Häufigkeit der Augenzahl 6 mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit fällt.

Wie oft muß man werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,90 die relative Häufigkeit der Augenzahl 6 um höchstens 0,05 von $\frac{1}{6}$ abweicht?

LK-Aufgabe /
Zentralabitur Baden-Württemberg 1985

In einer Bevölkerung sind 2 % sogenannte "K-Personen"; das sind Personen, die den Erreger einer noch nicht ausgebrochenen Krankheit K im Blut haben.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 50 Personen höchstens eine K-Person?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 1000 Personen mindestens 25 K-Personen?

Wieviel Personen muß man untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % wenigstens eine K-Person zu entdecken?

b) Bei einem Schnelltest werden 94 % der K-Personen als solche erkannt. Andererseits stuft der Test 8 % der Nicht-K-Personen irrtümlicherweise als K-Person ein.

Eine Person wird vom Test als Nicht-K-Person erklärt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie dennoch eine K-Person ist?

c) Die Wahrscheinlichkeit, daß die Krankheit bei einer K-Person ausbricht, beträgt 10 %. Eine Arzneimittelfirma behauptet, ein Vorbeugungsmittel gegen den Ausbruch von K zu besitzen. Zur Überprüfung dieser Behauptung nahmen 850 K-Personen regelmäßig das Medikament ein; bei 54 von ihnen kam die Krankheit K zum Ausbruch.

Kann man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,001 die Behauptung verwerfen, bei Einnahme des Me-

dikaments würde K dennoch mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 ausbrechen?

d) Der Anteil von K-Personen in der Bevölkerung sei nun p. Ein Bluttest läßt das Vorhandensein von Erregern für K sicher erkennen. Bei einer Reihenuntersuchung wird - um die Zahl dieser Tests zu verringern - das Blut von je 8 Personen vermischt und untersucht. Nur wenn im Gemisch Erreger von K gefunden werden, wird jede der 8 Personen zusätzlich einem Einzeltest unterzogen.

Gib die mittlere Anzahl von Tests (in Abhängigkeit von p) für Gruppen von 8 Personen an.

Für welche Werte von p sind dabei durchschnittlich weniger Tests nötig als bei der Einzelprüfung?

1. Abschlußaufgabe bayerischer Fachoberschulen

1. Eine Haftpflichtversicherung für Spezialfahrzeuge teilt ihre Versicherungsnehmer aufgrund der Schadenshäufigkeit in drei Kategorien A, B und C ein. In Klasse A ist der niedrigste, in Klasse C der höchste Versicherungsbeitrag zu entrichten. Fuhr ein Fahrzeughalter im vergangenen Versicherungsjahr unfallfrei, so steigt er in die nächstgünstigere Kategorie auf bzw. bleibt in Klasse A, falls er bereits dieser Kategorie angehörte. Meldete ein Versicherungsnehmer im letzten Jahr genau einen Schaden, so steigt er in die nächstungünstigere Klasse ab bzw. bleibt in C, wenn er bereits dieser Kategorie zugeteilt war. Fahrzeughalter, die zwei oder mehr Unfälle anzeigten, werden in jedem Fall in die Klasse C verwiesen, gleichgültig, welcher Kategorie sie im Vorjahr angehörten.

   Eine statistische Erhebung über die jährlichen Veränderungen in den Schadenskategorien zeigt folgendes:

   Von den in Klasse A Versicherten fahren im nächsten Jahr 80 % wieder unfallfrei, je 10 % verursachen genau einen bzw. mehr als einen Schaden. 60 % der Fahrzeughalter der Kategorie B melden keinen, 40 % von ihnen einen oder mehr Unfälle. Die Versicherungsnehmer der Klasse C bleiben zu 30 % in dieser Kategorie.

   a) Halten Sie die jährlichen Veränderungen in den einzelnen Kategorien in einem Diagramm fest und geben Sie die Übergangsmatrix für ein Versicherungsjahr an.

   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fahrzeughalter der Klasse A innerhalb der nächsten zwei Versicherungsjahre mindestens zwei Unfälle meldet.

   c) Von 1000 willkürlich ausgewählten Versicherungsnehmern sind jetzt 550 in Klasse A, 230 in Klasse B und der Rest in Kategorie C eingestuft. Ermitteln Sie die voraussichtliche Verteilung dieser Personen auf die drei Kategorien im nächsten Versicherungsjahr.

   d) Berechnen Sie, welcher Anteil der Versicherten auf lange Sicht der Kategorie A angehört.

   e) Zehn zur Klasse A gehörende Versicherungsnehmer werden willkürlich ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß im nächsten Jahr mindestens neun der zehn Fahrzeughalter keinen Unfall meldet.

2. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Versicherungsverträge an, die ein Vertreter der Haftpflichtversicherung täglich neu abschließt.

   Die Wahrscheinlichkeitsfunktion W der Zufallsgröße X ist mit den positiven reellen Zahlen a und b wie folgt definiert:

x	0	1	2	3	4	sonst.
$W(x)$	$2a$	$4a$	$a+b$	b	a	0

   Der Versicherungsvertreter schließt täglich durchschnittlich zwei Verträge neu ab.

   a) Berechnen Sie a und b.

   b) Setzen Sie nun $a = 0{,}05$ und $b = 0{,}3$.

c) Zeichnen Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion W.

d) Untersuchen Sie, welche Zufallswerte x innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert der Zufallsgröße X liegen.

e) Geben Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X an und stellen Sie die Funktion graphisch dar.

2. Abschlußaufgabe bayerischer Fachoberschulen

Für Glücksspiele stehen zwei Urnen I und II zur Verfügung. In jeder der beiden Urnen befinden sich sechs Kugeln, die sich nur durch die aufgedruckte Zahl unterscheiden.

Urne I enthält die Kugeln mit den Zahlen 1, 1, 1, 2, 3, 3.
Die Kugeln in Urne II tragen die Zahlen 1, 1, 2, 2, 2, 2.

Der Spieler, dem der Urneninhalt unbekannt ist, hat bei jedem Glücksspiel die freie Wahl zwischen den beiden Urnen.

1. Entscheidet sich der Spieler für ein Glücksspiel mit der Urne I, so hat er dieser Urne nacheinander willkürlich zwei Kugeln zu entnehmen, ohne die erste zurückzulegen.

   a) Zeichnen Sie das Baumdiagramm für dieses Glücksspiel und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Elementarereignisse.

   b) Die Zufallsgröße X_I gibt die Summe der Zahlen auf den beiden aus der Urne I gezogenen Kugeln an.

   c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X_I und zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

   d) Geben Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X_I an und stellen Sie die Funktion graphisch dar.