# FUNDIERUNG DES BEGRIFFS DER STOCHASTISCHEN UNABHÄNGIGKEIT ZUFÄLLIGER EREIGNISSE

von Hans Kilian, Dortmund

Zusammenfassung: Dieser Artikel beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Relation: "Das Eintreten des Ereignisses A ist förderlich für (bzw. ein Indiz für) das Eintreten des Ereignisses B" und deren möglicher Bedeutung für ein tieferes Verständnis der Unabhängigkeit von Ereignissen sowie für die Entwicklung des stochastischen Denkens.

## 1. Einleitung

Zum Stochastik-Unterricht gehört Unterricht in Wahrscheinlichkeitstheorie und in Statistik. Das Verhältnis der Anteile dieser beiden Komponenten verschiebt sich seit einiger Zeit hin zu einem höheren Gewicht für die Statistik. Ist Wahrscheinlichkeitstheorie per se eigentlich überhaupt noch von genügender Bedeutung?

Es gibt (mindestens) zwei globale Gründe, Mathematik zu lernen bzw. zu lehren: um diese anzuwenden, als Werkzeug zu gebrauchen oder um Denken zu lernen, um - besser - geistig arbeiten zu lernen. Der Anwender von Mathematik braucht sicherlich eher Statistik als Wahrscheinlichkeitstheorie (per se). Dafür liefert aber die Wahrscheinlichkeitstheorie ganz fundamentale Beiträge zu dem Kapitel "Denken lernen", und darunter wiederum der wichtigste ist m.E. der folgende: Neben der Kategorie des "kausalen Zusammenhanges" von Ereignissen wird eine Kategorie einer oder vielleicht mehrerer Arten von "stochastischem Zusammenhang" von Ereignissen sichtbar und - mehr oder weniger - beschreibbar. Man sieht noch andere Alternativen zu der Möglichkeit eines kausalen Zusammenhanges als das totale Chaos.

I. Kant formuliert das Kausalitätsprinzip in der "Kritik der reinen Vernunft" als "Grundsatz der Zeitfolge nach dem Gesetz der Kausalität" folgendermaßen: "Alles, was geschieht (anhebt zu sein), setzt etwas voraus, worauf es nach einer Regel folgt." (Kant, 1781, S. 189) D.h. also, wenn nach Belieben gewisse Bedingungen realisiert werden, dann folgt darauf (nach welchem Mechanismus auch immer) gesetzmäßig ein ganz bestimmtes Ereignis als Wirkung (vgl. Kant, 2. A. 1787, S. 183).

Stochastik in der Schule Heft 2, 6. Jg. (1986)

In der Stochastik werden dagegen andere Situationen betrachtet: Die Kategorie des stochastischen Zusammenhanges von Ereignissen tritt bereits in dem Begriff des zufälligen Ereignisses selber zu Tage. Wir können "Versuche" durchführen, deren "Ergebnisse" durch "die Bedingungen der Versuchsdurchführung" <u>nicht</u> eindeutig festgelegt sind, aber auch nicht völlig beliebig sind, sondern gewisse Regelmäßigkeiten trotzdem zeigen. Explizit wird dieses Phänomen dann in dem Begriff der "stochastisch unabhängigen Ereignisse" und noch allgemeiner und umfassender in dem Begriff der unabhängigen bzw. abhängigen Zufallsgrößen beschrieben, analysiert, mehr oder weniger verstanden, m.E. eher noch sehr wenig durchschaut.

Auch Schüler können und sollten diese Erweiterung ihres Kategorienvorrates aus dem Stochastik-Unterricht in ihr Leben mitnehmen. Das zugehörige Lernziel könnte man folgendermaßen plakativ beschreiben: Wenn ein Schüler die Behauptung hört, daß Rauchen Lungenkrebs fördert, dann soll er nicht mehr mit der Bemerkung reagieren, daß sein Großvater seit 40 Jahren jeden Tag zwei Päckchen Zigaretten rauche und immer noch kerngesund sei.

Im folgenden wird, unter den obigen Aspekten, eine Möglichkeit dargestellt, den Begriff der Unabhängigkeit von zufälligen Ereignissen besonders gründlich vorzubereiten und genetisch zu entwickeln. Wichtige mathematische Definitionen erfassen wichtige mathematische Sachverhalte und deshalb sollte sich eine solche Definition aus didaktischen Gründen im Normalfall an eine Beschäftigung mit dem Sachverhalt anschließen. Der Sachverhalt sind in diesem Fall die Möglichkeiten des Zusammenhanges zwischen zufälligen Ereignissen, insbesondere die Relation: Das Eintreten des Ereignisses A begünstigt, ist förderlich für, ist ein Indiz für das Eintreten des Ereignisses B. Ich bin auf diese Relation durch einen Vortrag von Borovcnik (1984, 1985) aufmerksam geworden.
Borovcnik bevorzugt die Formulierung "A begünstigt B", ich bin zunächst von der Formulierung "A ist förderlich für B" ausgegangen und dann, als Ergebnis dieser Untersuchung und auf eine Anregung von G. Schrage hin schließlich zu der Formulierung "A ist Indiz für B" gekommen (siehe unter Abschnitt 6).

Diese Sprechweise erscheint mir auch deshalb hilfreich für die Förderung des stochastischen Denkens zu sein, weil hier eine Relation zwischen Ereignissen betrachtet wird, die nicht durch eine Mengenrelation der Mengen, durch die die Ereignisse im mathematischen Modell dargestellt werden, beschrieben werden kann. Vielleicht kann man damit erreichen, daß Schüler bzw. Studenten weniger dazu neigen, "$A \cap B$" bzw. "$A \cup B$" als "A geschnitten B" statt "A <u>und</u> B" usw. zu lesen,



d.h. im Rahmen der Stochastik wirklich in Ereignissen und nicht in Mengen zu denken.

## 2. Beziehungen zwischen Ereignissen

Wir nehmen an, daß der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt worden ist, und betrachten nun weitere Beziehungen zwischen den Ereignissen eines W-Raumes $(\Omega, \mathfrak{X}, P)$. Im allgemeinen sind bei diesem Stand der Dinge schon folgende Situationen betrachtet worden:

(1) $A \cap B = \emptyset$, d.h. A und B ist unmöglich; A und B können nicht beide gleichzeitig eintreten. "Gleichzeitig" heißt hier: bei derselben Durchführung des zugrunde liegenden Versuchs V.

(2) $A \subseteq B$, d.h. A zieht B nach sich: Immer wenn A eintritt, tritt auch B ein. "Immer" heißt hier: Bei <u>jeder</u> Versuchsdurchführung, bei der A eintritt, tritt auch B ein.

Dazu kommt neu hinzu:

**Definition:** Es sei A,B Ereignisse eines W-Raumes $(\Omega, \mathfrak{X}, P)$, und es sei $P(A) \neq 0$. <u>Das Ereignis A ist ein Indiz für das Ereignis B</u>, wenn gilt:

$$P(B|A) > P(B).$$

Bezeichnung: A ii B, und "A ii B" wird gelesen: A <u>i</u>st <u>I</u>ndiz für B.

**Beispiele:**

(a) Als typische Urnenaufgabe (Heigl/Feuerpfeil, 1976, S. 76)

Urne I enthält vier weiße und zwei schwarze gleichartige Kugeln, Urne II enthält eine weiße und fünf schwarze Kugeln gleicher Art. Zuerst wird eine der Urnen ausgewählt, dann wird aus dieser Urne eine Kugel gezogen. Die Laplace-Annahmen sollen zutreffen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß

a) eine weiße Kugel aus der Urne I stammt,
b) eine weiße Kugel aus der Urne II stammt.

Das Ereignis "Urne I wird ausgewählt" ist ein Indiz für das Ereignis "Es wird eine weiße Kugel gezogen".

(b) Krankheitsdiagnose (Engel, 1973, S. 142)

Angenommen, es gibt einen zuverlässigen Test zur Diagnose einer Krankheit K. Für Reihenuntersuchungen einer Bevölkerungsgruppe möge gelten: Hat eine untersuchte Person die Krankheit K, dann ist der Test positiv (Ereignis + ) mit 96 % Sicherheit.

Hat die untersuchte Person die Krankheit K tatsächlich nicht, so ist der Test negativ (Ereignis $-$ ) mit 94 % Sicherheit.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine untersuchte Person, bei der der Test positiv ausging, tatsächlich die Krankheit K hat, wenn $\frac{1}{145}$ aller Personen der betreffenden Bevölkerungsgruppe die Krankheit haben?

Es wird also angesetzt:

$P(+ \mid K) = 96\ \% = 0.96,$

$P(- \mid \bar{K}) = 94\ \% = 0.94.$

Daraus ergibt sich

$P(- \mid K) = 4\ \% = 0.04, P(+ \mid \bar{K}) = 6\ \% = 0.06$

und

$P(+) = P(+ \mid K)\, P(K) + P(+ \mid \bar{K})\, P(\bar{K}) = 0.066.$

Daraus folgt mit $P(K) = 1/145 = 0.007$ schließlich

$P(K \mid +) = 0.10 > P(K).$

Ein positiver Testbefund stellt demnach ein Indiz für das Vorliegen der Krankheit K dar, wenngleich er aber sicherlich kein besonders starkes Indiz dafür ist.

## 3. Eigenschaften der Relation ii

Durch die Definition von A ii B und die obigen Beispiele kann man schon etwas über die Natur dieses Zusammenhanges zwischen Ereignissen lernen, aber selbstverständlich ist damit nur ein größeres Thema eben angeschnitten worden. Meine These ist nun, daß man durch die Analyse der mathematischen Eigenschaften der Relation ii auf der Menge $\mathcal{E}$ wertvolles weiteres Verständnis des Sachverhaltes gewinnen kann. Wir studieren daher im folgenden systematisch die Eigenschaften der Relation ii im Hinblick auf die Standardeigenschaften, die mathematische Relationen haben können. Im Unterricht sollte man den Schülern auf keinen Fall fertige Ergebnisse vorsetzen, sondern sie selbst forschen und entdecken lassen.

**Ergebnisse** (vgl. Borovcnik, 1985):

(1) Die Relation "... ist Indiz für ..." ist symmetrisch, d.h.
für alle $A, B \in \mathcal{E}$ gilt: Wenn A ii B, so ist auch B ii A.

Diese Symmetrie wirkt sicherlich zunächst überraschend, kann aber in den obigen Beispielen verifiziert werden: Das Ereignis "Urne I wird ausgewählt" ist Indiz für das Ereignis "Es wird eine weiße Kugel gezogen", aber umgekehrt ist der Umstand, daß eine weiße Kugel gezogen wurde, auch ein Grund dafür, anzunehmen, daß diese weiße Kugel eher aus der Urne I stammt. Im zweiten Beispiel ist tatsächlich vorhandene Krankheit K ein Indiz für einen positiven Testbefund.



Beweis der Symmetrie:
Es sei $P(B \mid A) > P(B)$. Daraus folgt $P(A \cap B) > P(A) \cdot P(B)$ und mit $P(B) \geq P(A \cap B)$, daß auch $P(B) \neq 0$ sein muß. Dann ist aber die weitere Aussage $P(A \mid B) > P(A)$ trivial.

(2) Die Relation ii ist nicht reflexiv auf $\mathcal{E}$.
Insbesondere gilt für kein $A \in \mathcal{E}$ irgendeine der Aussagen:
$A$ ii $\Omega$, $\Omega$ ii $A$, $\emptyset$ ii $A$ oder $A$ ii $\emptyset$.
Aber für jedes $A \in \mathcal{E}$ mit $0 < P(A) < 1$ gilt A ii A.

Diese Eigenschaften der Relation ii entsprechen sicherlich unseren Erwartungen: Weder das sichere Ereignis $\Omega$ noch das unmögliche Ereignis $\emptyset$ können das Eintreten eines anderen Ereignisses fördern oder behindern. Allgemeiner gilt sogar, daß kein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 1 oder 0 zu irgendeinem Ereignis in der Relation ii stehen kann. Im Grunde genommen ist also ii eine Relation auf der Menge

$$\mathcal{E}^* := \mathcal{E} \setminus \{X \subseteq \Omega \mid P(X) = 0 \text{ oder } P(X) = 1\}.$$

Für Ereignisse $A \in \mathcal{E}^*$ gilt dann trivialerweise A ii A, auf $\mathcal{E}^*$ eingeschränkt ist die Relation ii somit reflexiv.

(3) Aufgabe: Für welche Ereignisse A, B gilt $A$ ii $A \cup B$ bzw. $A$ ii $A \cap B$?

(4) Die nächste Frage ist die nach der Transitivität von ii:
Wenn A förderlich für B und B förderlich für C ist, ist dann A auch förderlich für C?
**In der Sprechweise mit Indizien:**
**Wenn A Indiz für B, B Indiz für C ist, ist dann A ein Indiz für C?**
Diese Frage ist nicht so ohne weiteres zu beantworten. Wir interpretieren dazu zunächst die Relation ii in Laplaceräumen. Dies ist auch für sich genommen interessant und wichtig.

**Satz:** Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein Laplacescher W-Raum und $A, B \subseteq \Omega$. Dann gilt A ii B genau dann, wenn die Häufigkeit/Dichte der Elemente von B in A höher ist als die Häufigkeit der Elemente von B in $\Omega$. Die zu B gehörigen Versuchsausgänge kommen dann also in A angereichert (gegenüber $\Omega$ ) vor.

Beweis: Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein Laplaceraum und $A, B \in \mathcal{E}$ mit A ii B.
Da nun

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$ und $P(B \mid A) = \frac{|A \cap B|}{|A|}$ ist, gilt

$$A \text{ ii } B \Leftrightarrow \frac{|A \cap B|}{|A|} > \frac{|B|}{|\Omega|}\,.$$

Der Quotient $|B|/|\Omega|$ gibt wegen $B \subseteq \Omega$ den Anteil oder die Häufigkeit der Elemente von B unter den Elementen von $\Omega$ an und entsprechend gibt wegen $A \cap B \subseteq A$ der Quotient $|A \cap B| / |A|$ den Anteil oder die Häufigkeit der Elemente von B unter denen von A an. Daraus ergibt sich die Interpretation der Ungleichung, die in dem Satz oben gegeben wurde.

(5) Damit ist es uns nun möglich, Beispiele zu konstruieren, die zeigen, daß die Relation ii nicht transitiv ist!

Dies widerspricht eventuell unseren Erwartungen und könnte den einen oder anderen veranlassen, die umgangssprachlichen Bezeichnungen der Relation mit "... ist förderlich für ...", "... begünstigt ..." als nicht adäquat zu betrachten. Jedenfalls zeigt sich hier, daß diese Relation nur eine recht lockere Verbindung, einen sehr losen Zusammenhang zwischen Ereignissen erfaßt. Aber vielleicht kann man auch klären, warum sie nicht transitiv ist und damit unsere intuitiven Erwartungen korrigieren!

(6) Gegenbeispiel zur Transitivität

Es sei $\Omega = \{1,2,3,\dots,10\}$ und $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ der Laplaceraum zu diesem $\Omega$ mit $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter sei $A = \{2,3,4,\dots,10\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$ und $C = \{1,2,4\}$. Dann gilt: A ii B, B ii C, aber A nicht-ii C:

a) $A \text{ ii } B \Leftrightarrow P(B \mid A) > P(B) \Leftrightarrow \dfrac{|A \cap B|}{|A|} > \dfrac{|B|}{|\Omega|}$,

und diese Bedingung ist erfüllt wegen $A \cap B = B$ und weil somit gilt:

$$\frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{5}{9} > \frac{5}{10} = \frac{|B|}{|\Omega|}\,.$$

b) $B \text{ ii } C \Leftrightarrow P(C \mid B) > P(C) \Leftrightarrow \dfrac{|C \cap B|}{|B|} > \dfrac{|C|}{|\Omega|}$,

und diese Bedingung ist ebenfalls erfüllt, da $C \cap B = \{2,4\}$ und weil somit gilt:

$$\frac{|C \cap B|}{|B|} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} > \frac{3}{10} = \frac{|C|}{|\Omega|}\,.$$

c) Schließlich ist

$$A \text{ ii } C \Leftrightarrow P(C \mid A) > P(C) \Leftrightarrow \frac{|C \cap A|}{|A|} > \frac{|C|}{|\Omega|}\,.$$

Diese Bedingung ist aber nicht erfüllt, da $C \cap A = \{2,4\}$ und weil somit gilt:



$$\frac{|C \cap A|}{|A|} = \frac{2}{9}\,, \quad \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{10} \quad \text{und} \quad \frac{2}{9} < \frac{3}{10}\,.$$

Die Relation ii ist daher i.a. nicht transitiv.

(7) **Ein Würfelbeispiel**

Es wird mit einem normalen Laplacewürfel einmal geworfen.

A,B und C sind folgende Ereignisse:

A "Es wird eine 2 geworfen", $P(A) = 1/6$.

B "Es wird eine gerade Zahl geworfen", $P(B) = 1/2$.

C "Es wird eine Zahl größer als 3 geworfen", $P(C) = 1/2$.

Das Ergebnis A zieht das Ergebnis B nach sich, daher ist $P(B \mid A) = 1$.

$$P(C \mid B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = 2 \ P(\{4,6\}) = \frac{2}{3}\,.$$

Ferner gilt: $A \cap C$ ist unmöglich, dh. $P(C \mid A) = 0$.

Insgesamt sieht man durch Vergleich der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und bedingten Wahrscheinlichkeiten:

A ii B , B ii C , aber: A ist nicht förderlich für C, A ist kein Indiz für C.

Eine genauere Analyse, insbesondere des Beispiels (6), zeigt, daß das Phänomen der Nichttransitivität durch folgenden Umstand entstehen kann. Das "vermittelnde" Ereignis B setzt sich aus zwei Ereignissen U und V folgendermaßen zusammen:

a) $B = U \cup V$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ und $|U \cap V| \ll |U|,\ |V|$

b) Die Versuchsausgänge, die zu A beitragen, sind in U enthalten, nicht in V.

c) Die Versuchsausgänge, die zu C beitragen, sind in V enthalten, nicht in U.

A und B hängen also sozusagen über U zusammen, dagegen B und C über V, ferner ist $U \cap V$ klein. Ich ziehe daraus den Schluß, daß unsere intuitiven Erwartungen an die Relation "... ist förderlich für, ist Indiz für ..." nicht gerechtfertigt sind und korrigiert werden müssen, ähnlich wie man sich etwa klar machen muß, daß die Relation "... ist verwandt mit ..." nichttransitiv ist.

## 4. Begründung der Definition der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen

Zunächst braucht man noch eine andere Charakterisierung der Aussage A ii B.

**Satz:** Es sei $0 < P(A) < 1$. Dann gilt:

$$A \text{ ii } B \Leftrightarrow P(B \mid A) > P(B \mid \bar{A})\,.$$

Beweis: A ii B $\Leftrightarrow$ $P(B \mid A) > P(B)$

$\Leftrightarrow$ $P(B \mid A) > P(B \mid A)\,P(A) + P(B \mid \bar{A})\,P(\bar{A})$

nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit,

$\Leftrightarrow$ $P(B \mid A)\,(1-P(A)) > P(B \mid \bar{A})\,P(\bar{A})$

$\Leftrightarrow$ $P(B \mid A) > P(B \mid \bar{A})$, da $P(\bar{A}) \neq 0$.

Als Folgerung erhalten wir nun den folgenden wichtigen Satz:

**Satz:** Es sei $\mathcal{E}^* = \{X \in \mathcal{E} \mid 0 < P(X) < 1\}$. Für je zwei Elemente $A, B \in \mathcal{E}^*$ gilt: Es ist stets genau einer der drei folgenden Fälle gegeben:

(a) A ii B

(b) $\bar{A}$ ii B

(c) A und B sind in ihrem Eintreten unabhängig voneinander, es gilt:
$P(B \mid A) = P(B \mid \bar{A}) = P(B)$.

Beweis: Die obige "stochastische Trichotomie" folgt sofort aus der normalen Trichotomie der Relation <, angewandt auf $P(B \mid \bar{A})$ und $P(B \mid A)$ sowie aus dem vorhergehenden Satz.

Wenn weder A noch $\bar{A}$ Indiz für das Eintreten von B sind und auch weder B noch $\bar{B}$ Indiz für das Eintreten von A sind, so wird man sagen, daß sich A und B hinsichtlich ihres Eintretens oder Nichteintretens gegenseitig nicht beeinflussen, also in gewisser Weise unabhängig voneinander sind.

**Definition:**

(a) Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{E}^*$ heißen stochastisch unabhängig voneinander, wenn $P(B \mid A) = P(B)$ ist.

(b) Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{E}$ heißen stochastisch unabhängig voneinander, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ist.

Der Teil (b) der Definition berücksichtigt auch noch die Überlegungen aus (2) in Abschnitt 3 über Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1 und gibt die allgemeine und endgültige Definition der stochastischen Unabhängigkeit an. Sie erfaßt also <u>den ganz besonderen Sachverhalt</u>, daß sich zwei Ereignisse hinsichtlich ihres Eintretens gegenseitig nicht beeinflussen. Der obige Satz über die "stochastische Trichotomie":

Entweder ist A ii B oder $\bar{A}$ ii B oder A und B sind unabhängig voneinander,

entwertet doch etwas die Relation ii, weil sie, sozusagen, zu allgemein verbreitet ist: Im Regelfall gilt für zwei Ereignisse A ii B oder $\bar{A}$ ii B. - Schließlich überlegt



man sich auch noch leicht, daß aus A ii B stets folgt $\bar{A}$ ii $\bar{B}$. Dazu verwendet man, daß jedenfalls $\bar{A}$ ii $\bar{B}$ oder $\bar{A}$ ii B gelten muß und A ii B und $\bar{A}$ ii B nicht zusammenpassen.

## 5. Die Anzahl der Paare unabhängiger Ereignisse in Laplaceräumen

Um meine Aussage zu untermauern, daß die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse A, B ein ganz besonderer Sachverhalt ist, will ich die Anzahl der (nichtgeordneten) stochastisch unabhängigen Paare $\{A,B\}$ in Laplaceräumen berechnen. Dabei ist, für die obige Fragestellung, zu berücksichtigen, daß das unmögliche Ereignis $\emptyset$ und das sichere Ereignis $\Omega$ von jedem Ereignis A <u>trivialerweise</u> unabhängig sind. Deshalb interessiert hier vor allem die Anzahl der <u>nichttrivialerweise</u> unabhängigen Paare von Ereignissen A und B.

**Definition:** Gegeben ist der Laplaceraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ mit $|\Omega| = n \; (n \in \mathbb{N})$ und $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(\Omega)$

(a) Unter der Funktion $n \mapsto NA(n)$, $n \in \mathbb{N}$ sei folgendes verstanden:

NA(n) := Anzahl der <u>nichttrivialerweise</u> stochastisch unabhängigen, <u>nichtgeordneten Paare $\{A,B\}$</u> von Ereignissen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$

(b) Die zugehörige Anteilsfunktion $n \mapsto RNA(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist wie folgt festgelegt:

$$RNA(n) := \frac{NA(n)}{\text{Anzahl } \underline{\text{aller}} \text{ nichtgeordneten Paare } \{A,B\} \text{ von Ereignissen aus } \mathfrak{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset, \Omega\}.} \tag{1}$$

**Satz 1:** Im obigen Laplaceraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ seien folgende Bezeichnungen festgehalten: $n = |\Omega|$, $x := |A \cap B|$, $y := |A|$ und $z := |B|$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt: A und B mit $A,B \in \mathcal{E}$, $A,B \neq \emptyset, \neq \Omega$ sind (nichttrivialerweise) unabhängig genau dann wenn die Bedingung

$$n x = y z \quad \text{mit } 1 \leq x,y,z \leq n-1 \tag{2}$$

gilt.

Beweis: A und B unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} \cdot \frac{|B|}{|\Omega|}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{n} = \frac{y}{n} \cdot \frac{z}{n} \Leftrightarrow xn = yz$.

Aus den Zusatzforderungen $A,B \neq \emptyset, \neq \Omega$ ergeben sich die Bedingungen $1 \leq y,z \leq n-1$.

Nun muß noch überlegt werden, daß der Fall $x = 0$ für nichttriviale Ereignisse A und B, dh. für $A,B \neq \emptyset, \neq \Omega$, sowieso ausgeschlossen ist. Das prüft man leicht an einer der beiden letzten Gleichungen in obiger Schlußkette nach.

**Satz 2:** Zu jeder Lösung x,y,z der Gleichung (2) in Satz 1 gibt es

$$\binom{n}{x}\binom{n-x}{y-x}\binom{n-y}{z-x} \qquad (3)$$

Paare nichttrivialerweise unabhängiger Ereignisse (A,B) mit $x = |A \cap B|$, $y = |A|$, $z = |B|$.

Beweis: Zu gegebenem x kann man auf $\binom{n}{x}$ Arten einen Durchschnitt $A \cap B$ auswählen, dann diesen einerseits auf $\binom{n-x}{y-x}$ Arten zu einer Menge A ergänzen sowie andererseits diesen auf $\binom{n-y}{z-x}$ Arten zu B auffüllen.

**Satz 3:**

$$NA(n) = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=x}^{n-1}\sum_{z=x}^{n-1} \delta_{nx,yz}\binom{n}{x}\binom{n-x}{y-x}\binom{n-y}{z-x} \qquad (4)$$

Beweis: Im Beweis von Satz 2 wird wegen $A \neq B$ (außer $\emptyset, \Omega$ ist kein Ereignis von sich selber unabhängig) jedes ungeordnete Paar $\{A,B\}$ doppelt gezählt. Der Ausdruck in (3), multipliziert mit $\frac{1}{2}$ gibt nun die Anzahl gesuchter ungeordneter Paare $\{A,B\}$ von nichttrivialerweise unabhängigen Ereignissen für ein Tripel (x,y,z), das Gleichung (2) löst. Nun hat man diese Anzahlen noch für alle Lösungen von (2) aus Satz 1 aufzusummieren. Das ergibt gerade die behauptete Formel (4).

Anmerkungen:

(a) Wenn n eine Primzahl ist, so hat (2) offensichtlich überhaupt keine Lösung (unter den angegebenen Bedingungen), in so einem Fall gilt:
$NA(n) = RNA(n) = 0$ !

(b) Die einzelnen Summanden in (4) müssen der Sache nach symmetrisch in y und z sein. Wie man leicht nachrechnet, gilt das auch:

$$\binom{n}{x}\binom{n-x}{y-x}\binom{n-y}{z-x} = \binom{n}{x}\binom{n-x}{z-x}\binom{n-z}{y-x} = \frac{n!}{x!(y-x)!(z-x)!(n+x-y-z)!}$$

(c) $\delta : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ ist das sog. Kroneckersymbol mit

$$\delta_{i,k} := \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich erhält man für den Nenner in (1) offensichtlich $\binom{2^n-2}{2}$ und für RNA(n) daher

$$RNA(n) = \frac{2\ NA(n)}{(2^n-2)(2^n-3)}.$$



Ich habe diese Funktion mit Hilfe eines Pascalprogramms[1)] berechnet. Das folgende Diagramm repräsentiert die Ergebnisse und bestätigt den vermuteten Sachverhalt. Es ist sogar zu vermuten, daß $RNA(n) \to 0$ geht $(n \to \infty)$.

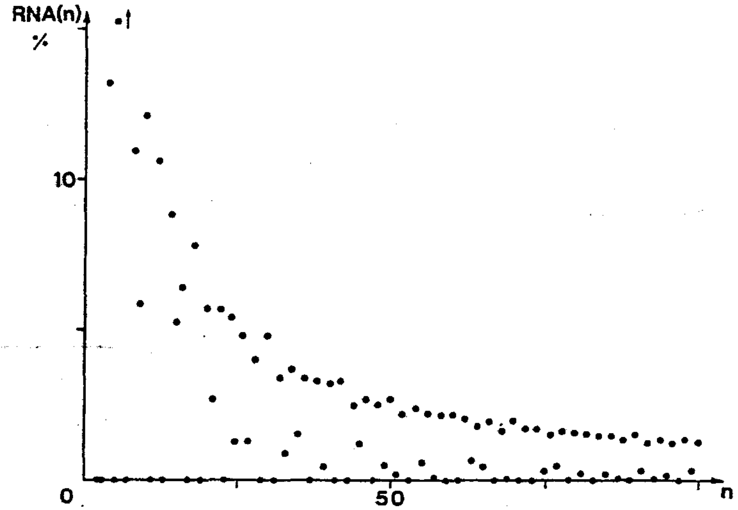


Fig.

6. Schlußbemerkungen

Insgesamt scheinen mir die vorhergehenden Ergebnisse, insbesondere die Nichttransivität der Relation ii sowie der Umstand, daß i.a. vermutlich für "fast alle" Ereignisse entweder A ii B oder $\bar{A}$ ii B, nach Abschnitt 5, gilt, den Schluß nahezulegen, daß die Relation ii im wesentlichen nur eine Rolle im stochastischen Denken spielen wird im Rahmen der Entwicklung und Begründung des Begriffs der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen. Ich kann ihr, im Gegensatz zu Borovcnik, keine eigenständige und dauernde Funktion in der Stochastik zubilligen. Sie beschreibt, wie schon gesagt, doch nur einen sehr losen Zusammenhang zwischen Ereignissen und als umgangssprachliche Beschreibung des stochastischen Befundes ist deshalb die Formulierung "... ist Indiz für ..." zweifellos am angemessensten, am wenigsten irreführend.

Ich möchte Herrn Schrage für die sorgfältige Lektüre eines früheren Entwurfes dieses Artikels sowie hilfreiche und fördernde Fragen und Bemerkungen dazu ganz besonders danken!

1) In Oxfordpascal, CBM 64. Interessierten stelle ich gerne eine Kopie des Programms zur Verfügung.

Literatur

BOROVCNIK, M.: Wahrscheinlichkeitsrevision und Denken in Wahrscheinlichkeiten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1985. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1985, 79-82.

BOROVCNIK, M.: Begünstigen - eine stochastische Intuition. In: Praxis der Mathematik 27 (1985) 327-333.

ENGEL, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band I. Stuttgart: Klett 1973.

FEUERPFEIL, R. u. F. HEIGL: Stochastik - Leistungskurs. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag 1976.

KANT, I.: Kritik der reinen Vernunft, 1. Aufl. 1781, 2. Aufl. 1787.

Prof. Dr. Hans Kilian
Institut für Didaktik der Mathematik
Universität Dortmund
Vogelpothsweg 87
D-4600 Dortmund (BRD)