DAS FORMULIEREN UND LÖSEN VON STOCHASTISCHEN AUFGABEN ALS MATHEMATISCHES SCHAFFEN

von Adam Plocki, Krakau

1. Einführung

Stochastische Ideen breiten sich derzeit in anderen Wissenschaftszweigen und in der beruflichen Praxis immer mehr aus. Deshalb werden diese Ideen auch im Mathematikunterricht der Schule eingeführt. Die spezifischen Besonderheiten der stochastischen Begriffe und Methoden lassen im Mathematikunterricht neue Schwierigkeiten auftreten, bereichern ihn jedoch zugleich um neue Formen der mathematischen Aktivität. Wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellungen können somit ihren besonderen Beitrag in der Bildung vermittels Mathematik sowie im Vetrautmachen des Schülers mit mathematischen Methoden liefern.

Eine besondere Rolle können hierbei Aufgaben spielen. Gegenwärtig enthalten die dem Schüler gestellten stochastischen Aufgaben vielleicht bereits die Gestalt von fertigen mathematischen Modellen. Die einzige Form einer schöpferischen mathematischen Betätigung bei der Lösung einer solchen stochastischen Aufgabe ist die Rechnung innerhalb eines fertigen a priori vorgegebenen probabilistischen Modells. Niemand zeigt dem Schüler, wer, weshalb und auf welche Weise er zu einem solchen Modell gelangte, wer und unter welchen Umständen eine solche Aufgabe formulierte, wem und welchem Zweck das Lösen der Aufgabe dienen sollte. Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse ist zum einzigen Inhalt und allerwichtigsten Zweck von stochastischen Aufgaben geworden.

Die Deduktion ist eine wichtige, aber wohlgemerkt, nur eine unter vielen wichtigen Formen der mathematischen Aktivität, die sich zur mathematischen Kultur des Menschen zusammenfügen. Zweck der Unterweisung in Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule kann es also nicht sein, sie einzig und allein als eine abgeschlossene Theorie darzu-

stellen, die global deduktiv aufgebaut wird. Stochastische Ideen sollten - ähnlich wie Elemente der Geometrie - verhältnismäßig früh in den Mathematikunterricht einbezogen werden. Bereits zehnjährige Schüler sind durchaus imstande, das Wesen einiger stochastischer Begriffe und Ideen richtig zu erfassen, obwohl sie in diesem Stadium ihrer psychosomatischen Entwicklung das Wesen der Deduktion im allgemeinen noch nicht begreifen. Durch das Lehren von Mathematik sind wir bestrebt, intellektuelle Denkarten des Menschen auszubilden, die mathematische Kultur zu gestalten, die doch nicht nur in der Befähigung zur Deduktion in Erscheinung tritt. Das Rechnen nehmen dem Menschen heutzutage Maschinen ab. Gegenwärtig bedarf der Mensch anderer Fähigkeiten, die durch die für die Mathematik typischen mathematischen Aktivitäten entwickelt werden können: die Fähigkeit, zu schematisieren und zu mathematisieren, zur Codierung und Decodierung von Information zum Wahrnehmen von Analogieen und dergleichen mehr).

Die Begriffe und Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung können vom Schüler im Schulunterricht selbst entdeckt werden - entdeckt als neue mathematische Instrumente der Analyse, der Beschreibung und Erforschung der uns umgebenden Wirklichkeit. Mit einer solchen genetischen Lehrmethode, die die in der Schule geübte Wahrscheinlichkeitsrechnung in statu nascendi auffaßt, ist das Problem der Auswahl von entsprechenden Situatuionen konkreter Art - eng mit dem Tätigkeitsbereichen des Schülers verknüpft - verbunden, auf deren Hintergrund Fragen und Aufgaben gestellt werden, die in mathematische Sprache umgesetzt und vom Schüler mit mathematischen Mitteln, die er bereits kennt, bzw. die er unter der Aufsicht des Lehrers - um dem Bedarfsfall gerecht zu werden - zu entdecken vermag, gelöst werden.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dergleichen Situationen, die zur Einführung des Begriffes "Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses" inspirieren und motivieren, um sich seiner als eines Instrumentes zur Lösung von praktischen Problemen zu bedienen. Zugleich wird auf den Reichtum an verschiedenen Formen des mathematischen Schöpfens aufmerksam gemacht, die sich auf dem Wege von diesen wirklichkeitsnahen Situationen zur Welt der mathematischen Abstraktion und unmgekehrt entfalten lassen.

Das Formulieren, in Angriff nehmen und Lösen von Aufgaben, die aus den erwähnten Situationen hervorgehen, erfolgt unter Heranziehung folgender Formen mathematischer Aktivität und Kreativität:

a) ein rationales Konstruieren von Fragen; Erteilung (sich selbst) von rationalen Weisungen. Es werden bestimmte mathematische Fragen aufgrund einer konkreten Situation formuliert.

b) Schematisierung und Mathematisierung, d.h. Fragmente der Wirklichkeit mit mathematischen Mitteln ordnend erfassen, Objekte der realen Wirklichkeit in die Welt der mathematischen Abstraktion übertragen;

c) Codieren mit mathematischen Mitteln sowie Decodieren verschiedener Informationen;

d) das Aufstellen, Formulieren und Verifizieren verschiedener Hypothesen mit mathematischen Mitteln;

e) die Entdeckung, Begründung und Anwendung verschiedener Analogieen und Isomorphismen im schlußfolgernden Denkprozeß (Methodentransfer)

f) Vereinfachung der Denkabläufe durch den Übergang zu einem anderen Modell; Transformation der gegebenen Probleme in bereits gelöste Fragen

g) Verallgemeinern und Abstrahieren

h) Entdecken und Definieren von Begriffen

i) die Entdeckung auf induktivem Wege, Formulierung und Beweisen von Behauptungen;

j) Argumentieren, Organisation und Unterstützung des mathematischen Denkens mit verschiedenen Mitteln, insbesondere mit Zeichunungen;

k) Entdeckung von Lücken und Fehlern im Denkvorgang

l) Interpretation der Deduktionsergebnisse aus der Sicht der realen Wirklichkeit

Der Autor bringt in dieser Arbeit seine Reflexionen und Erfahrungen zur Sprache, die sich bei ihm im Laufe seiner langjährigen Lehrtätigkeit auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Grund- und Mittelschulen der Stadt Krakau eingestellt haben.

Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden dem Mathematik-Lehrplan in Polen in den 70-er Jahren hinzugefügt, und zwar in den letzten Klassen von Ober- und Berufsschulen (mit Abiturabschluß) im Umfang von etwa 20 Unterrichtsstunden. Die Klassen werden von Schülern im Alter von 18 bis 19 Jahren besucht. Das bis heute (1987) realisierte Programm der Wahrscheinlichkeitsrechnung umfaßt folgende Fragenkomplexe:

Die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit (in bezug auf einen endlichen Ergebnisraum), Laplace-Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeiten, die totale Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit bei zwei und bei mehr als zwei Ereignissen, Zufallsgrößen und ihr Erwartungswert, Varianz, die Bernoulli-Kette, die Binomialverteilung, die Ungleichung von Bienayme-Tschebyschow für binomial verteilte Zufallsgrößen und das Gesetz der großen Zahlen.

Das erste Pflichtlehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt eine elegant präsentierte Konzeption zur Darlegung der fertigen Theorie dar. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kommt innerhalb dieser Konzeption einzig und allein im klassischen Aspekt zur Darlegung, der axiomatische Aspekt wird übergangen.

Die Lernergebnisse im Bereich der Stochastik nach dieser Konzeption sind leider dürftig. Die Schüler begreifen die grundlegenden stochastischen Begriffe nicht. Stochastische Aufgaben werden von ihnen bei Aufnahmeprüfungen oder bei Abiturexamen kaum in Angriff genommen geschweige denn richtig gelöst. Diese Tatsachen lassen bereits seit Jahren Bedenken aufkommen.

Arbeit Nr. 4 der Bibliographie (s.u.) ist bereits das zweite in Polen erscheinende Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit Elementen der mathematischen Statistik) für Mittelschulen, das zur Schulverwendung seit 1980 zugelassen wurde, bestimmt für weiterbildende Berufsschulen und Oberschulen mit humanistischer Ausrichtung. Dieses Lehrbuch ist in den Jahren 1975 bis 1980 während des vom Autor geführten Mathematik-Unterrichts unter Mitarbeit seiner Studenten in Anlehnung an Studien über Mathematik- Didaktik entstanden. Der Autor ist wissenschaftlicher Mitarbeiter im Mathematikinstitut der Pädagogischen Hochschule in Krakau.

Dem Autor lag nicht daran, den Schülern fertiges Wissen zu vermitteln, sondern sie an dem Entdeckungsprozeß selber schöpferisch unter seiner Anleitung mit Hilfe des Lehrbuches teilhaben zu lassen. Das so erworbene Wissen soll ihnen als Instrument der realen Welterkenntnis dienen. Die Entdekkungstätigkeit wollte der Autor als schöpferische mathematische Betätigung im weitesten Sinne des Wortes verstanden wissen.

Der vorliegende Artikel präsentiert einige Ideen dieses Lehrbuches. Die Abschnitte 2 und 3 sind im Grunde genommen Berichte über den Verlauf der ersten Unterrichtsstunden in Stochastik. Die Abschnitte 4 und 5 werfen einiges Licht auf die Rolle, welche Aufgaben bei der Gestaltung von stochastischen Begriffen und bei der Auslösung von mathematischer Aktivität in den nachfolgenden Unterrichtsstunden spielen können.

Das Probabilitätsmodell ist (in dieser Arbeit) ein Paar $(\Omega;p)$, wobei Ω ein endlicher Ergebnisraum und p eine Funktion von Ω in die Menge der reellen Zahlen ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $p(\omega) \geqslant 0$ für jedes ω aus der Menge Ω,

(2) $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$

Die Funktion p nennen wir eine "Wahrscheinlichkeitsverteilung". Als "Wahrscheinlichkeit" wollen wir die Funktion P auf der Menge $S = \mathcal{P}(\Omega)$ in die Menge der reellen Zahlen bezeichnen, für die gilt:

(3) $P(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$ für $A \in S$

Ist p eine konstante Funktion, so bezeichnen wir sie als die "klassische Verteilung der Wahrscheinlichkeit", wobei wir das Paar $(\Omega;p)$ als das klassische Probabilitätsmodell betrachten.

2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Instrument zur Wahl der optimalen Strategie im Spiel

Die erste Lektion in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnt mit einem einfachen Auslosungsspiel. Als Requisiten hierzu dienen drei beim Betasten identische Kugeln, von denen zwei schwarz und eine weiß sind. Von diesen Kugeln werden von mir zwei ausgelost. Beide halte ich in der geschlossenen Hand. Die Schüler versuchen zu erraten, ob die in der Hand gehaltenen Kugeln von der gleichen Farbe (Ereignis A) oder von verschiedener Farbe sind (Ereignis B). Nachdem ich gezeigt habe, was ich in der Hand gehalten hatte, ist klar, welches Ereignis eingetreten ist.

Vor der nächsten Auslosung zweier Kugeln setzt jeder Schüler auf das Eintreten des einen oder des anderen Ereignisses, indem er seinen Code, den Buchstaben A oder B, auf einem Zettel vermerkt. Erst dann erfolgt die Auslosung. Einen Punkt gewinnen alle Schüler, die richtig gesetzt haben, die also auf das Ereignis gesetzt hatten, das eingetreten ist.

Es geht hier nicht um das Spiel selbst, obwohl es einige Male wiederholt wird, um die Schüler mit seinen Regeln vertraut zu machen, sondern um die Fragen, die sich aufgrund eines solchen Spiels stellen lassen. Es geht u.a. um folgendes:

1. Was hat ein solches Spiel überhaupt mit Mathematik zu tun?
2. Sollte ich mich nochmals an jenem Spiel beteiligen, auf welches von den Ereignissen A und B soll ich setzen?
3. Woran erinnert uns dieses Spiel? Woher kennen wir ein solches Spiel?

Die zweite Frage befaßt sich mit der Beurteilung der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A und B, und zwar mit einer qualitativen Einschätzung. Falls die Ereignisse A und B gleich wahrscheinlich sind, so dürfte es gleichgültig sein, auf welches von ihnen ich setzen werde. Falls das nicht der Fall ist, dann lohnt es sich, auf das wahrscheinlichere von ihnen zu setzen.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses wird hier zu einem Instrument der Wahl der optimalen Strategie im Auslosungsspiel.

Die Antworten auf die zweite Frage fallen durchaus verschieden aus.

- "Hier regiert der Zufall, also sind beide Ereignisse gleich wahrscheinlich."
- "Die Auslosung von zwei Kugeln der gleichen Farbe ist wahrscheinlicher, weil die Anzahl der schwarzen Kugeln größer ist!"
- "Ich setze auf das Eintreten des Ereignisses B. Das Ereignis B ist wahrscheinlicher als das Ereignis A!"

Jerder muß jedoch seine Meinung begründen. Das mathematische Denken, zu dem diese Frage inspiriert hatte, wird nun durch eine Zeichnung organisiert und unterstützt (Bild 1). Jede "Klammer", die zwei Kugeln miteinander verbindet, repräsentiert eine andere, genauso wahrscheinliche Kombination zweier Elemente der Sammlung der drei Kugeln, also ein Auslosungsergebnis.

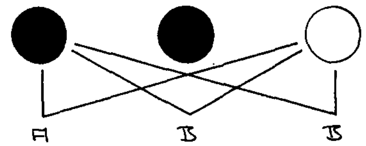
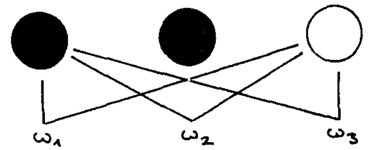


Bild 1

Bild 1 ist zugleich zu einer ikonenhaften Form der Darstellung des klassischen Probabilitätsmodells geworden, das der Schüler für die Auslosung zweier von drei Kugeln bestimmt hatte.

Bild 2 erläutert eingehend, um was für ein Modell es sich hierbei handelt.



$$\Omega = \{\omega 1;\ \omega 2;\ \omega 3\}\ ;\ p(\omega 1) = p(\omega 2) = p(\omega 3) = 1/3$$

$$A = \{\omega 1\}\ ;\ B = \{\omega 2;\ \omega 3\}$$

$$P(A) = P(\{\omega 1\}) = p(\omega 1) = 1/3$$

$$P(B) = P(\{\omega 2;\ \omega 3\}) = p(\omega 2) + p(\omega 3) = 2/3$$

Bild 2

Das Ereignis B ist doppelt so wahrscheinlich wie das Ereignis A. Es lohnt also mehr, im Spiel auf das Ereignis B zu setzen. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (und das nicht unbedingt in zahlenmäßiger Hinsicht, denn wesentlich ist einzig und allein die Tatsache $P(A) < P(B)$) wurde zu einem neuen, vom Schüler selbst entdeckten Instrument zur

Lösung des Problems, das sich auf der Grundlage des Auslosungsspiels ergeben hatte.

Die Situation inspiriert zur nächsten Frage: Was für eine Kugel, eine weiße oder eine schwarze, sollte zu den vorhandenen drei hinzugefügt werden, damit die Auslosung zweier Kugeln der gleichen Farbe (Ereignis A) genauso wahrscheinlich ist wie die Auslosung von zei Kugeln verschiedener Farbe (Ereignis B)?

Alle antworten sofort einmütig, daß eine weiße Kugel hinzugelegt werden müsse. Die Gleichheit $P(A) = P(B)$ müßte - so die Meinung der Schüler - bei einer derart in der Sammlung von Kugeln eingeführten Svmmetrie (weiße und schwarze Kugeln in gleicher Anzahl) eintreten. Diese Antwort ist aber falsch. Dies erläutert Bild 3a oder besser noch Bild 3b. Jede zweielementige Kombination aus der Sammlung der vier Kugeln wird in Bild 3b durch eine Verbindung von zwei Eckpunkten des Vierecks dargestellt.

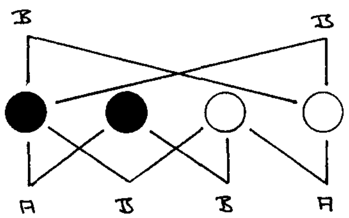


Bild 3a

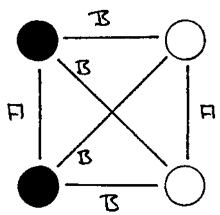


Bild 3b

Das Ereignis B ist in dieser neuen Situation wieder doppelt so wahrscheinlich wie das Ereignis A. Diese Tatsache ist für die Schüler eine große Überraschung. Die richtige Antwort ergibt sich aus Bild 4.

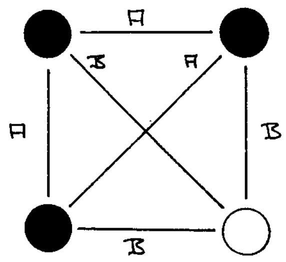


Bild 4

Das zuletzt erwähnte Problem macht deutlich, wie falsch unsere probabilistischen Intuitionen sein können. Somit können stochastische Aufgaben eine erzieherische Rolle spielen. Sie lehren, etwas kritische Distanz gegenüber voreilig gefällten Urteilen zu üben, sie leiten zu Überlegungen an. Das Spiel ergab den Hintergrund für die Formulierung der ersten stochastischen Aufgabe. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses wurde zu einem neuen, im Grunde genommen vom Schüler selbst entdeckten Instrument zu ihrer Lösung. Eine einfache Zeichnung ergab das Mittel, mit dem die Aufgabe angegangen werden konnte.

Die Auslosung von zwei Kugeln aus mehreren inspiriert im Laufe der nächsten Unterrichtsstunden zu verschiedenen Formen der mathematischen Aktivität. Die oben für $n = 3$ und $n = 4$ dargelegte Idee der Bestimmung der Zahl der zweielementigen Kombinationen innerhalb einer Sammlung von n Elementen führt zur Entdeckung auf induktivem Wege der bekannten Formel

$$(4) \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Diese Formel wurde bei der Bestimmung der Zahl der Verbindungen von je zwei Eckpunkten eines n-Ecks entdeckt, die die Zahl der gleichwahrscheinlichen Auslosungsergebnisse zweier von n Kugeln interpretiert. Die für eine Aufgabe gefundene

Lösung wird zum Auflösen von anderen Aufgaben verwendet. Die Formel (4) gestattet es, sofort eine Antwort auf folgende Probleme zu finden:

a) Auf einer Fläche sind n Punkte gegeben. Keine drei von ihnen liegen auf einer Geraden. Wieviele verschiedene Geraden durch je zwei Punkte gibt es?

b) Zu einem Treffen haben sich n Personen eingefunden. Jede Person reichte jeder anderen Person zur Begrüßung die Hand. Wie oft wurden die Hände geschüttelt?

c) Es muß eine Informationsbank über Entfernungen zwischen n Ortschaften angelegt werden. Wie macht man das? Wieviele Kombinationen von zwei Ortschaften genügt es, zu diesem Zweck aufzuschreiben?

d) Jede zwei von k Staaten unterhalten diplomatische Beziehungen miteinander. Wie groß ist die Anzahl der Botschafter?

e) Von einem Spiel mit n verschiedenen Karten, die vorher gründlich gemischt und wieder zu einem Stapel geordnet wurden, werden zwei der Reihe nach oben aufliegende Karten gezogen. Wieviele Ergebnisse können bei einem solchen Experiment erzielt werden?

Aus Bild 5 ergibt sich die Antwort auf die Frage im Beispiel c) mit n = 5 . Diese Form der Darstellung einer Menge von zweielementigen Kombinationen aus einer Sammlung mit n Elementen kann in vielen Taschenkalendern angetroffen werden. Im Mathematikunterricht sollte die Fähigkeit entwickelt werden, die Informationen in ihren vielfältigen Codierungen zu entziffern - beispielsweise sei hier im Alltag wichtige Fähigkeit erwähnt, sich der in Buchform verfügbaren Fahrpläne zu bedienen.

Gdansk				
573	Krakow			
332	242	Lodz		
<u>303</u>	389	201	Poznan	
343	294	133	303	Warszawa

Die unterstrichene Zahl repräsentiert die Kombination (Gdansk; Poznan) aus der Menge (Gdansk; Krakow; Lodz; Poznan; Warszawa)

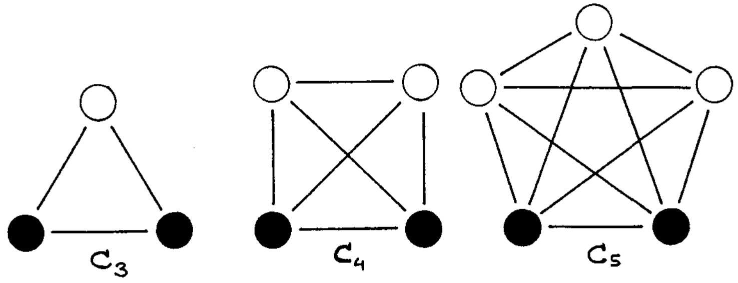
Bild 5

Die Idee der Darstellung einer Informationsbank über Wegstrecken gestattet es, auf eine andere Weise die Zahl der zweielementigen Kombinationen in einer Sammlung mit n Elementen zu bestimmen. Aus dieser Darstellungsform läßt sich die folgende Formel ableiten:

$$(5) \qquad \binom{n}{2} = (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Verbleiben wir aber bei unserer Sammlung von zwei schwarzen und einer weißen Kugel und fügen wir ihr nacheinander je eine weiße Kugel zu. U_n soll eine Urne mit zwei schwarzen und $n - 2$ weißen Kugeln bezeichnen. Mit C_n bezeichnen wir das Ereignis "Beide ausgelosten Kugeln sind scharz".

Die auf Bild 6 aufbauende Idee zur Konstruktion einer Sammlung aller möglichen Auslosungsergebnisse zweier unter n Kugeln erlaubt es, die Zahlenwerte der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C_n zu bestimmen (siehe Bild 6).



P(C3) = 1/3 P(C4) = 1/6 P(C5) = 1/10

Bild 6

Unter den $n(n-1)/2$ möglichen und gleich wahrscheinlichen Ergebnissen der Auslosung zweier Kugeln aus der U_n-Urne gehört nur eins zum Ereignis C_n, also:

$$(6) \qquad P(C_n) = \frac{1}{n(n-1)/2} = \frac{2}{n(n-1)}$$

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist hier im klassischen Aspekt ausgewiesen worden.

3. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Instrument der Überprüfung von Hypothesen

Die nächste Unterrichtsstunde in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von einer kurzen Erzählung eingeleitet. Aus dem Ausland kehren fünf Touristen zurück, von denen genau zwei Gold schmuggeln. An der Grenze werden zwei von den Touristen vom Zöllner zur eingehenden Zollkontrolle gebeten, und beide erweisen sich als Schmuggler.

Der dargelegte Vorfall an der Grenze soll zu verschiedenen Fragen inspirieren, darunter vor allem zu Fragestellungen, die man in mathematischer Sprache formulieren kann und auf die Antworten mit mathematischen Mitteln zu erlangen sind. Die Schüler lassen zunächst verschiedene Schlußfolgerungen verlauten, der Zöllner hätte außerordentliches Glück gehabt,

jemand müßte sie angezeigt haben, usw. Die Meinungen werden anfänglich rein spontan geäußert. Es bleibt ziemlich unklar, was der Vorfall mit Mathematik gemein haben möchte.

Die Sachlage wird klarer, sobald die Klasse sich vor das Problem gestellt sieht, zu überprüfen, ob irgendein Grund zu der Annahme besteht, daß eine Anzeige erstattet wurde.

Wird die Hypothese angenommen, daß niemand die Schmuggler angezeigt hatte, so eröffnet dies die Möglichkeit, den Vorfall an der Grenze als eine Auslosung von zwei Kugeln aus einer U_5-Urne - wie sie oben beschrieben worden war - zu betrachten.

Eine konkrete Situation unter der Voraussetzung, daß die Hypothese richtig ist, wird in eine Welt von Denkmodellen übertragen, die typisch für die Mathematik sind (Urnenmodelle).

Die Annahme der Hypothese bedeutet, daß das Ereignis C_5 eingetreten ist, dessen Wahrscheinlicjhkeit wir bereits kennen:

$$P(C_5) = \frac{2}{5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$$

Die Tatsache, daß eine solche Wahrscheinlichkeit nicht gering ist, besagt, daß kein Grund dazu vorhanden ist, diese Hypothese in Frage zu stellen.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist hier wiederum zu einem mathematischen Instrument der Entscheidung in einem konkreten Fall geworden. Ihren Anteil an der Formulierung, Inangriffnahme und Lösung der aus dem Grenzvorfall erwachsenden Aufgabe haben:

a) ein Schematisierungs- und Mathematisierungsvorgang, der diesen Vorfall wie eine Auslosung von Kugeln aus einer Urne betrachten läßt (Die Annahme einer entsprechenden Konvention der Vereinfachung, impliziert durch die Voraussetzung, daß niemand dem Zöllner etwas angezeigt hatte, daß aus dem Benehmen der Reisenden nicht zu entnehmen war, daß einer von ihnen etwas schmuggelt usw., gestattete es, die wesentlichsten Tatasachen in den Vordergrund zu bringen unter Verzicht auf Einzelheiten, die für eine derartige mathematische Bearbeitung des Ereignisses unwesentlich waren),

b) das Formulieren des Problems in mathematischen Kategorieen; ein Übergang aus der realen Wirklichkeit in die Welt mathematischer Begriffe und Modelle,

c) die Entdeckung von Analogieen,

d) eine Umbildung des gegebenen Problems in bereits gelöste Probleme,

e) eine Interpretation des Begriffes der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in seinem realen Modell.

Der Weg, der von der realen Wirklichkeit in die Welt der mathematischen Abstraktion zurückgelegt worden ist, ist in Bild 7 dargestellt. Die waagerechte Linie makiert hier eine Art von Horizont, der diese zwei Welten voneinander trennt.

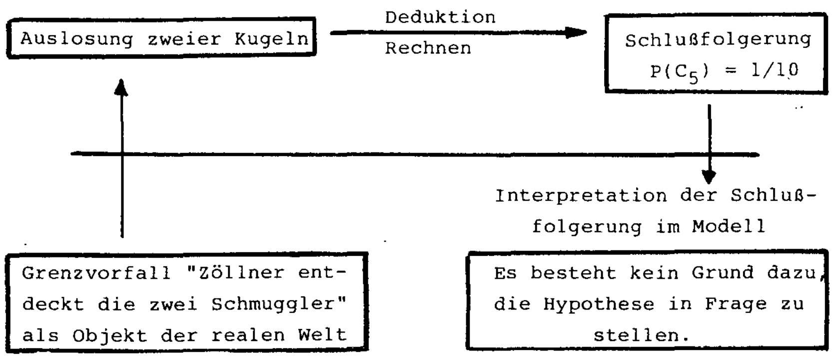


Bild 7

Jeder der begangenen Wege inspiriert zu bestimmten Formen der mathematischen Kreativität. Der ständige Objektwechsel verdient betont zu werden. Einmal ist die Rede von Objekten

der realen Welt, ein andermal von Objekten der Welt der mathematischen Abstraktion. Die zweiten entsprechen den ersteren; man gelangte zu ihnen durch Schematisierung und Mathematisierung.

4. Ist Vortritt immer ein Privileg ?

In der Urne befinden sich c schwarze und b weiße Kugeln, $b + c = n$. Wir losen n Kugeln aus, ohne daß die ausgeloste Kugel in die Urne wieder zurückgelegt wird. Mit C_k bezeichnen wir das Ereignis: "Beim k-ten Mal wird die ausgeloste Kugel schwarz sein." $k = 1;\ldots;n$. Berechne $P(C_k)$! Das Ergebnis ist überraschend.

Die Wahrscheinlichkeit hängt hier nicht von k ab.

Die gesamte mathematische Aktivität bei der Lösung dieser Aufgabe beschränkte sich im Grunde genommen auf die erwähnten Berechnungen. Weder weiß der Schüler wer und unter welchen Umständen ein solches Problem aufgeworfen hat, noch wem oder welchem Zweck seine Lösung dienen sollte. Dabei muß betont werden, daß die Berechnungen selbst nicht gerade interessant waren. Somit stellt sich die Frage des Einbeziehens derartiger Aufgaben in den Mathematikunterricht. Was sollte der Schüler lernen, indem er sie löste ? Wofür kann der Ertrag dieser Bemühungen nutzbar gemacht werden ?

Betrachten wir nun ein einfaches Spiel, in dem als Requisit ein Satz von 26 verschiedenen Karten dient. An dem Spiel beteiligen sich zwei Spieler, die wir Eva und Adam nennen wollen. Nach gründlichem Mischen werden die Karten in einen Stoß mit den Rückseiten nach oben gelegt. Die Spieler ziehen abwechselnd je eine Karte. Es gewinnt derjenige von ihnen, der Pik As zieht.

Adam sagt zu Eva: "Ich will Gentleman sein, ich trete Dir das Recht ab, den ersten Zug zu tun." Hat Adam das Recht, sich unter diesen Umständen als Gentleman zu betrachten ? Es könnte scheinen, daß eine so formulierte Frage nichts mit Mathematik gemeinsam hat. Aber sie wurde absichtlich gerade auf diese Weise formuliert. Es geht nämlich darum, daß der Schüler sie selbst in die Sprache der Mathematik umsetzt.

Adam darf sich Gentleman nennen, falls er unter Verzicht auf Vortritt zugleich seine Gewinnchancen vermindert. Ist dies in der beschriebenen Situation der Fall ?

Betrachten wir in diesem Zusammenhang folgende zwei Ereignisse :

A : "Adam gewinnt."   E : "Eva gewinnt."

Der Vortritt, der Eva eingeräumt wird, ist für sie ein Privileg, falls dadurch das Ereignis E wahrscheinlicher wird als das Ereignis A . So geschieht die Umformulierung in die mathematische Sprache.

Um die Wahrscheinlichkeiten $P(E)$ und $P(A)$ zu bestimmen, genügt es , die Analogie wahrzunehmen, die zwischen dem aufeinanderfolgenden Ziehen der Karten aus dem Stoß und dem Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne mit 26 Kugeln, von denen eine schwarz (entspricht Pik As) und 25 weiß sind (entsprechen den übrigen Karten), besteht.

Die Ereignisse A undE lassen sich somit in ein probabilistisches Modell einbetten, das bei der Aufgabe mit der Auslosung der Kugeln konstruiert worden ist. Wir haben also:

$$E = C_1 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_{25} \quad \text{und}$$

$$A = C_2 \cup C_4 \cup \ldots \cup C_{26}$$

Das ergibt sich daraus, daß die schwarze Kugel (die bezeichnete Karte) ein einziges Mal vertreten ist. Indem wir uns das Ergebnis der vorherigen Aufgabe nutzbar machen, erhalten wir:

$$P(E) = 13 \cdot \frac{1}{26} = \frac{1}{2} \; ; \; P(A) = 13 \cdot \frac{1}{26} = \frac{1}{2}$$

Dieses Deduktionsergebnis interpretieren wir nun im Kontext der Situation, die in unserem Spiel mit den Karten eingetreten ist. Die Chancen beider Spieler sind gleich groß.

Das Recht, den ersten Zug zu tun, ist in dieser Situation erwiesenermaßen kein Privileg.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses hat sich auch hier als ein Instrument zur Lösung einer konkreten Frage erwiesen.

Auf dem Hintergrund des dargelegten Problems zeichnen sich folgende Fragen ab:

a) Ist das Recht auf Vortritt ein Privileg, falls als Requisit im Spiel allein nur ein Satz mit Pik-Karten verwendet wird ?
b) Sind die Chancen beider Spielenden gleich unabhängig von der gesamten Anzahl der Karten, unter denen eine ausgezeichnet wird ?
c) Was geschieht, wenn im Falle der Verwendung von 26 schwarzen Karten im Spiel beide As-Karten ausgezeichnet werden ?

Das selbständige Formulieren dieser Fragen durch den Schüler betrachten wir unter den gegebenen Umständen als eine wichtige Form der mathematischen Aktivität.

5. Das Losen mit Zündhölzern und die Transposition gestellter Probleme in bereits gelöste

Häufig werden wir im Leben vor die Notwendigkeit gestellt, k von n Personen auszulosen. In solchen Situationen geht es darum, daß über die Wahl ausschließlich nur der Zufall zu entscheiden habe, indem jedem der Beteiligten gleiche Chancen eingeräumt werden. Man nimmt in einem solchen Fall n Zündhölzer und beseitigt bei k von ihnen den Kopf. Jemand, den die Auslosung nicht erfaßt, vermischt die Zündhölzer untereinander, ohne dabei beobachtet zu werden, und hält sie in der Hand so aufgereiht, daß die Enden mit oder ohne Kopf unsichtbar bleiben. Jede der n Personen zieht nun ein Zündholz. Als ausgeloste Personen werden diejenigen betrachtet, die ein Zündholz ohne Zündkopf gezogen haben. Beim Ziehen der Hölzer ergibt sich natürlicherweise eine bestimmte Reihenfolge von Personen. Haben alle an der Auslosung Beteiligten tatsächlich die gleichen Chancen ?

Hinter diesem unmathematischen Problem verbirgt sich eine stochastische Aufgabe. Vom Schüler wird verlangt, daß er das aufgetauchte Problem in die mathematische Sprache übersetzt. Er muß also eine konkrete Situation in die Welt der mathematischen Abstraktion transponieren. Das dargestellte Vorgehen soll er mit Hilfe der für die Wahrscheinlichkeitsrechnung typischen Urnenmodelle beschreiben und die gestellte Frage in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Ausdruck bringen.

Gewöhnlich haben wir es damit zu tun, daß unter n Personen eine mit Hilfe der Zündhölzer ausgelost wird. Wenn ich im Unterricht die bedingte Wahrscheinlichkeit behandle, wird von mir die Frage nach der Chance eines jeden Beteiligten bei der Zündholzauslosung gestellt. Wir gehen dabei von der Annahme aus, daß mit der Auslosung eines Zündholzes ohne Kopf bestimmte Privilegien verknüpft sind. Als Teilnehmer bist Du daran interessiert, ein Zündholz ohne Kopf zu ziehen. Vor der Auslosung darfst Du dich in die Reihenfolge eintragen, nach der dann das Ziehen der Zündhölzer erfolgen wird. Welchen Platz in der Reihe wirst Du belegen ?

Stellt man das Problem auf diese Weise, so beinhaltet es ein bestimmtes Maß an Motivation.

Die Meinungen der Schüler gehen deutlich auseinander:

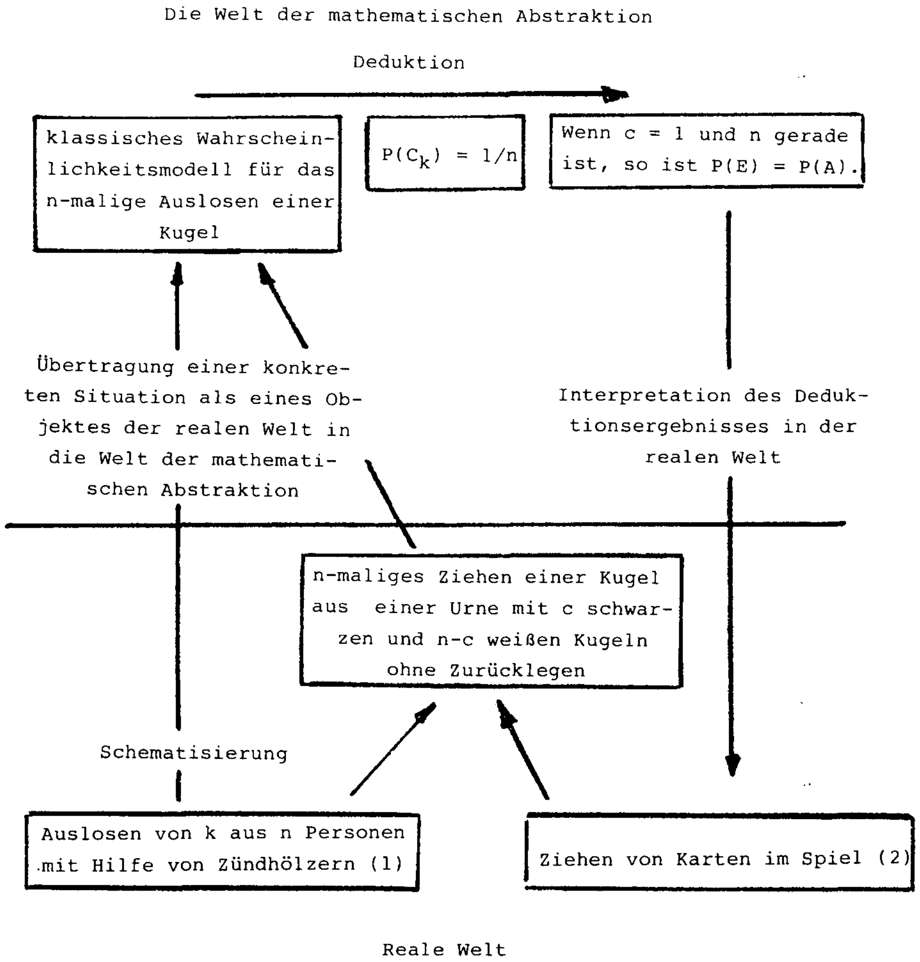
- "Ich ziehe es vor, als erster zu losen; denn dann kann ich auf alle Fälle damit rechnen, das kopflose Zündholz zu ziehen," meinen die einen.
- "Besser ist es, später zum Zug zu gelangen, denn wenn die vor mir gezogenen Zündhölzer alle mit Kopf sein werden, wird sich meine Chance, ein Zündholz ohne Kopf zu ziehen, vergrößert haben," erwidern andere.
- "Nun gut, wenn aber jemand vor mir das Zündholz ohne Kopf zieht, so sinken meine Chancen auf Null," gibt einer der Schüler zu bedenken.

- "Es bleibt sich völlig gleich, welchen Platz ich auf der Liste einnehmen werde," ruft einer der Schüler dazwischen.

Der so enstandene Streit inspiriert zu zahlreichen mathematischen Aktivitäten. Es muß entschieden werden, wer recht hat. Wer von den Schülern hat in seinen Überlegungen einen Fehler gemacht, und worin besteht er ?

In dem geschilderten Streit verdeutlicht sich eine Begriffsvermischung zwischen der Wahrscheinlichkeit, ein Zündholz ohne Kopf zu ziehen, wenn man beim k-ten Mal zum Zuge gelangt, mit der bedingten Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses, sobald bekannt wurde, welche Zündhölzer vorher bereits ausgelost worden waren. (Dieses konkrete Mal wurde vor Beginn der Auslosung betstimmt, also in einer Situation, wo wir über keinerlei Information darüber verfügten, was sich bei den vorangegangenen Losziehungen ereignet hatte). Denn die Information, welche Zündhölzer im früheren Verlauf der Auslosung gezogen worden waren, beeinflußt die Wahrscheinlichkeit, ein Zündholz ohne Kopf zu ziehen, durch den, der hernach zum Zuge gelangt. Dieser Eionfluß der Information über das Eintreten eines Ereignisses auf die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses stellt das Wesen des stochastischen Begriffs der Unabhängigkeit der Ereignisse dar. Die bei der Auslosung von Zündhölzern eingetretene Situation kann zu der Herausbildung dieses schwierigen Begriffs einen Beitrag leisten.

Um zu der richtigen Antwort auf das gestellte Problem zu gelangen, muß der Schüler eine "mathematische Brille" aufsetzen. Durch sie betrachtet, sieht ein Zündholz ohne Kopf für ihn wie eine schwarze Kugel und ein Zündholz mit Kopf wie eine weiße Kugel aus. Das Ereignis " Derjenige, der beim k-ten Male zum Zuge gelangt, wird ein Zündholz ohne Kopf ziehen" wird bei einer solchen Interpretation zum Ereignis C_k , dessen Wahrscheinlichkeit uns bereits bekannt ist. Denn es wurde bereits im Modell bestimmt, das für die Auslosung von Kugeln bearbeitet worden war. Das Ergebnis dieser Berechnungen übertragen wir - dank der entdeckten Analogieen -



(1) Bei der Auslosung mit Zündhölzern hat jeder die gleichen Chancen.

(2) Der gewährte Vortritt ist kein Privileg im Spiel.

Bild 8

auf die Situation, die bei der Auslosung mit Zündhölzern entstanden ist.

In Bild 8 werden die verschiedenen Übergänge von der realen Welt zur Welt der mathematischen Abstraktion und umgekehrt gezeigt, die dazu gedient haben, die Inangriffnahme und Lösung der letzten Aufgaben zu bewerkstelligen.

LITERATUR

1. KRYGOWSKA,Z.: Zarys dydaktyki matematyki, t.3 WSiP, Warszawa 1980
2. PLOCKI,A.: Zadania probabilistyczne jako element ksztalcenia matematycznego, Wydawnictwo Naukowe WSP, Krakow 1985
3. PLOCKI,A.: Zadania z rachunku prawdopodobienstwa a ksztalcenie matematyczne, Matematyka nr 4/1984
4. PLOCKI,A.: Rachunek prawdopodobienstwa dla szkoly sredniej, WSiP, Warszawa 1985
5. WITTMANN,E,: Grundfragen des Mathematikunterrichts .- Braunschweig: Vieweg 1974