ÜBER EINE UNTERHALTSAME ALTERNATIVE ZU KONVENTIONELLEN WÜRFELSPIELEN

von AXEL BÖTTCHER, München

ZDM-Klassifikation: K 54, M 94, R 24

Vor wenigen Jahren brachte die Firma MB ein "Würfelspiel" auf den Markt, bei dem zur Ermittlung der Spielpunkte nicht Würfel, sondern zwei kleine Plastikschweinchen verwendet werden. *) Jedes der beiden Schweinchen kann auf verschiedene Weise - jeweils mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit - zum Liegen kommen: auf der Seite, auf dem Rücken, etc. Die mit einem Wurf erzielte Punktezahl hängt von der Lage beider Schweinchen ab. Jeder Spieler darf in seinem Durchgang solange werfen, bis er entweder freiwillig aufhört, oder eines der Schweinchen auf der rechten und eines auf der linken Seite zum Liegen kommt. Im ersten Fall wird ihm die Summe aller Würfe des Durchgangs, im zweiten Fall kein Punkt zugeschrieben. Berühren sich die beiden Schweinchen, so werden ihm alle bisher gutgeschriebenen Punkte gestrichen. Sieger ist, wer als erster 100 Punkte erreicht hat. Die genaue Spielanleitung ist im Anhang abgedruckt.

Folgende Frage drängt sich bei diesem Spiel auf: Wie kann ein Spieler die Möglichkeit, selbst bestimmen zu können, wann er seinen jeweiligen Durchgang beendet, so ausnützen, daß er pro Runde möglichst viele Punkte zu erwarten hat?

Diese Frage kann meines Erachtens als eine Herausforderung in einen Kollegstufenkurs Mathematik hineingetragen werden. Sie kann Anreiz zur selbständigen Beschäftigung mit der Stochastik bieten. Eine Möglichkeit, diese Frage zu behandeln, wird im Folgenden vorgeschlagen. Der Reiz daran ist nicht etwa, daß die Untersuchung besonders tiefliegend wäre, sondern er geht einfach davon aus, daß man für eine relativ undurchsichtige Spielsituation eine leicht zugängliche Modellbildung finden kann. Als Voraussetzung sind Kenntnisse in Informatik nützlich.

---

*) "Schweinerei", ein Spiel der Firma Milton Bradley GmbH, 1984. Bezug über den Spielwarenhandel.

Die Untersuchung kann folgenden Nutzen bringen:

a) Die Schüler müssen das Spiel formal beschreiben. Durch geeignete Modellierung läßt sich das spätere numerische Rechnen entscheidend vereinfachen. Außerdem hilft das Modell, einfache Spezialfälle zu betrachten. Das Formulieren formaler Modelle ist ein wichtiger Vorgang.

b) Es werden Grenzen und Möglichkeiten für den Computereinsatz deutlich.

1.) Eine formale Beschreibung könnte etwa so aussehen: Betrachtet wird folgendes Spiel für beliebig viele Teilnehmer. Zugrunde liegt ein Zufallsexperiment mit den möglichen Ergebnissen A_0, $A_1, \ldots, A_k$, welche mit den Wahrscheinlichkeiten p_0, $p_1, \ldots, p_k$ ($0 < p_i < 1$ für $i=0,\ldots,k$ und $p_0+p_1+\ldots+p_k=1$) eintreten. Jedem der Ausgänge $A_1,\ldots,A_k$ ist eine gewisse Punktezahl $n(A_i)>0$ zugeordnet. A_0 nimmt eine Sonderstellung ein. Jeder Spieler darf in seinem Durchgang das Zufallsexperiment sooft ausführen wie er will, längstens jedoch bis zum Eintreten von A_0. Wird er durch A_0 zum Aufhören gezwungen, so erhält er keinen Punkt. Hört er dagegen vorher freiwillig auf, so wird ihm die Summe der den erzielten Versuchsergebnissen entsprechenden Punkte gutgeschrieben. Sieger des Spieles ist, wer als erster eine gewisse Grenze an Punkten überschreitet.

An dieser Stelle sind zwei Anmerkungen zur Modellbildung angebracht: Um sich später das Rechnen zu erleichtern, ist es günstig, nicht die jeweilige Lage eines einzelnen Schweinchens, sondern immer gleich die beider zusammen als ein Ergebnis anzusehen, denn nur davon hängt die Anzahl der erzielten Spielpunkte ab.

Das Ergebnis "Die beiden Schweinchen berühren sich" führt stets zum Verlust aller bisher angesammelten Spielpunkte. Es läßt sich so betrachten, als wäre A_0 eingetreten und muß nicht eigens behandelt werden.

2.) Nun zu der Frage, welche Möglichkeiten es gibt, "Erfolgschancen" zu bestimmen und diese zu beeinflussen. Dazu betrachten wir zwei Regeln, die darin bestehen, sich von vorneherein vorzugeben, wann man jeweils seinen Durchgang beendet (sofern man nicht vorher schon durch A_0 zum Aufhören gezwungen wird). Dazu kann man

I) aufhören, sobald eine vorgegebene Schranke von N Punkten erreicht ist, oder

II) nach dem j-ten Wurf aufhören.

Im folgenden sollen diese beiden Strategien verglichen werden.

3.) Es ist N^* bzw. j^* so zu bestimmen, daß die Zahl der pro Runde zu erwartenden Punkte maximiert wird. Es bezeichne X_N (bzw. Y_j) diejenige zufällige Variable, welche die pro Runde erzielten Punkte angibt, wobei sich der Spieler nach der Regel I (bzw. II) richtet. P sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Wurf A_0 nicht eintritt; d.h. $P = \sum_{i>0} p_i$.

Es gilt $E(X_1) = E(Y_1) = \sum_{i>0} n(A_i)\, p_i$

Den Erwartungswert $E(Y_{j+1})$ der nach dem j+1-ten Wurf erzielten Punkte kann man mittels $E(Y_j)$ unter Berücksichtigung folgender Tatsachen bestimmen:

a) die bis zum j-ten Wurf erzielte Punktezahl muß stehenbleiben, es darf also nicht A_0 im j+1-ten Wurf eintreten, und

b) es darf insgesamt j-mal hintereinander A_0 nicht eintreten.

Somit ergibt sich für $j \geq 1$:

$$E(Y_{j+1}) = P\, E(Y_j) + P^j\, E(Y_1)$$

also:

$$E(Y_{j+1}) = (j+1)\, P^j\, E(Y_1).$$

Damit lassen sich die $E(Y_1)$ sowie j^* leicht berechnen.

Die Bestimmung der $E(X_N)$ ist nicht ganz so leicht möglich. Ich schlage folgendes heuristische Vorgehen zur Bestimmung eines N^* vor: Man berechnet mit N=1 beginnend solange die Erwartungswerte $E(X_N)$, bis ein - zumindest lokales - Maximum gefunden ist. Man betrachtet am besten zunächst ein einfaches Beispiel eines derartigen Spiels, das sich noch leicht von Hand rechnen läßt. Etwa $k=2$, $n(A_1)=1$, $n(A_2)=2$, $p_1=0.2$, $p_2=0.3$. An diesem Beispiel kann verdeutlicht werden, wie der zu jedem N gehörige Ereignisraum Ω_N aussieht. Ω_N besteht aus allen Tupeln $(a_1,\ldots,a_j)$ mit

$a_i \in \{A_1,\dots,A_k\}$ falls $i<j$, und $a_j \in \{A_0, A_1,\dots, A_k\}$ so, daß entweder $a_j=A_0$, oder $a_j \neq A_0$ und $n(a_1)+\dots+n(a_{j-1})<N$ und $n(a_1)+\dots+n(a_j)\geq N$.
Im genannten Beispiel ergibt sich: $E(X_1) = 0.80$, $E(X_2) = 0.86$, $E(X_3) = 0.79$, $E(X_4) = 0.70$ und $E(X_5) = 0.55$.
Für $k>2$ lassen sich die Erwartungswerte nicht mehr so leicht berechnen, zumal sie dann auch für einige $N>3$ benötigt werden. So ist etwa bei unserem konkreten Spiel $k=8$ und es ist mindestens noch $E(X_{21})$ zu berechnen! Man muß sich dann notwendig eines Computers bedienen. Im Anhang gebe ich die Formulierung eines entsprechenden Programms in TURBO-PASCAL an.

4.) Um für das vorliegende Spiel N^* und j^* zu bestimmen, werden die Wahrscheinlichkeiten p_i benötigt. Diese müssen empirisch ermittelt werden. Es ergaben sich in 1440 Versuchen folgende Häufigkeiten:

Ergebnis	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0
Punkte	1	5	10	15	20	25	40	60	--
Häufigkeit	377	556	103	27	62	2	2	1	310

Damit erhält man sofort $j^*=4$ und $E(Y_4) = 7.8933$
Eine Berechnung der Erwartungswerte $E(X_N)$ mit einem Atari 520 ST Computer lieferte folgende Werte (wobei nur die interessanten Werte in der Nähe des Maximums angegeben sind):
$E(X_{19}) = 8.8207$
$E(X_{20}) = 8.8219$
$E(X_{21}) = 8.8068$
Zur Berechnung dieser 21 Erwartungswerte benötigte der Computer ca. 20 Sekunden. Es läßt sich also ein weniger leistungsstarker Rechner durchaus einsetzen. Ich habe insgesamt alle Werte bis N=49 bestimmt. Dabei wachsen die Rechenzeiten allerdings stark an. Bis N=30 wurden bereits 5 Minuten, und bis N=40 mehr als zwei Stunden benötigt. Danach werden die Rechenzeiten unerträglich hoch. Alle so ermittelten Werte sind in Bild 1 eingetragen. Zur besseren Übersicht sind die Werte zu einem Polygonzug verbunden. Der punktierte Polygonzug verbindet die $E(Y_j)$.

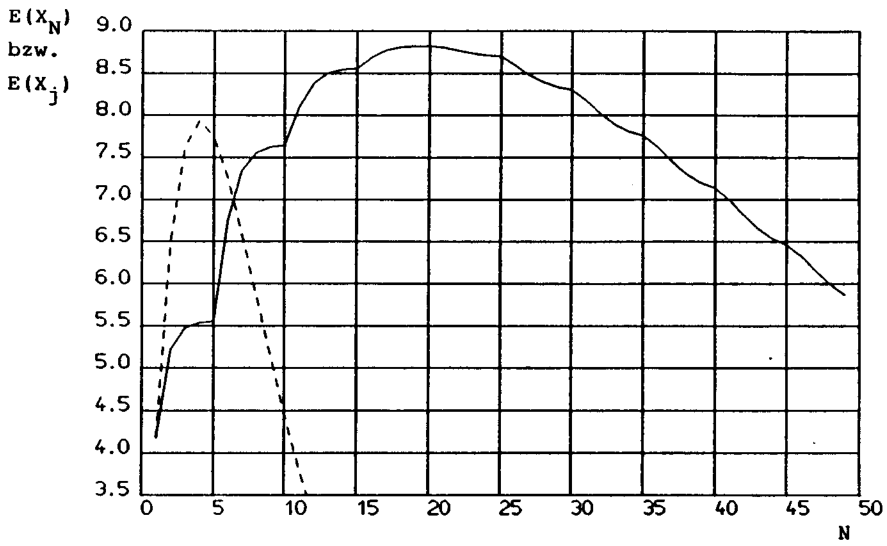


Bild 1

Also nehmen wir Regel II mit $N^* = 20$ an.
Es muß bei der Wertung des Ergebnisses folgendes bedacht werden:

a) Die p_i wurden empirisch ermittelt. Aufgrund der Elastizität der Spielfiguren lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ergebnisse möglicherweise durch geschicktes Werfen beeinflussen. D.h. es kann sein, daß im Mittel mehr Ergebnisse mit einer höheren Punktezahl auftreten, als wenn man sie einfach fallen läßt. Dieser Aspekt wurde hier nicht berücksichtigt.
b) Das Ergebnis ist durch Rundungsfehler verfälscht. So ergibt die exakte Berechnung von $E(X_2)$ den Wert 5.2204, und die Berechnung mittels obigem Programm, in welches ja die p_i bereits als Gleitkommazahlen eingehen, den Wert 5.1964.
c) Die Werte zwischen ca. 15 und 25 liegen sehr dicht beieinander, wodurch sich beim "praktischen Einsatz" kein wesentlicher Unterschied zwischen den entsprechenden Strategien zeigen wird.

<u>Anmerkungen:</u>

a) Eine Kombination der Regeln I und II bringt nur eine zu vernachlässigende Verbesserung des Ergebnisses.
b) Die Spielanleitung bietet noch weitere Spielvorschläge.

ANHANG

a) Programm in TURBO-PASCAL:

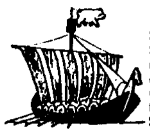
```
PROGRAM schweinerei(input, output);
{Berechnet E(X_N) für ein N. N wird auf die Variable 'abbruch'
eingelesen. Die Bezeichnungen p, n und k sind vom Text oben
übernommen. i, j und k sind Laufvariable. Alle anderen er-
klären sich von selbst.}
CONST
      k = 8; { Anzahl der Ergebnisse ohne A0}
      p : ARRAY[1..k] OF REAL = ( 0.261806, 0.386111, 0.071528,
                   0.01875, 0.043056, 1.389E-3, 1.389E-3, 6.94E-4);
      n : ARRAY[1..k] OF INTEGER = (1, 5, 10, 15, 20, 25, 40, 60);
VAR
      abbruch, i, j,
      punktesumme        : INTEGER;
      wahrscheinlichkeit,
      erwartungswert     : REAL;

PROCEDURE berechnungsschleife (VAR erwart : REAL; abbruch,
            naechstes_ergebnis, punkte : INTEGER; ws : REAL );
VAR l : INTEGER;

BEGIN
      punkte := punkte + n[naechstes_ergebnis];
      ws     := ws * p[naechstes_ergebnis];
      IF punkte >= abbruch
      THEN erwart := erwart + (punkte * ws)
      ELSE FOR l := 1 TO k DO
           berechnungsschleife(erwart, abbruch, l, punkte, ws);
end berechnungsschleife ;

BEGIN{schweinerei}
      WRITELN('Fuer welches N ist Erwartungswert zu berechnen?');
      READLN(abbruch);
      erwartungswert := 0;
      FOR i := 1 TO k DO BEGIN
         punktesumme          := n[i];
         wahrscheinlichkeit   := p[i];
         IF punktesumme >= abbruch
```



```
         THEN erwartungswert := erwartungswert +
                          (punktesumme * wahrscheinlichkeit)
         ELSE FOR J := 1 TO k DO berechnungsschleife(erwar-
                          tungswert, abbruch, j, punktesumme,
                          wahrscheinlichkeit);
      END for i := 1 to k ;
      WRITELN('Der Erwartungswert ist ',erwartungswert);
END schweinerei .
```

b) Spielanleitung:

SCHWEINEREI ist ein uraltes Spiel der Wikinger, das über viele Jahrtausende in Vergessenheit geraten war.
Erst den neueren Forschungen von Professor S. Ch. Nitzel aus Wien ist es zu danken, daß SCHWEINEREI heute wieder nach den Original-Regeln gespielt werden kann.
Bei den Ausgrabungen im berühmten Wikinger-Hafen Haithabu hatte man sich zunächst immer wieder gewundert, wie klein die luxuriös eingerichteten Deckskajüten auf den Normannenschiffen waren.
S. Ch. Nitzel wies nun nach, daß diese Luxuskabinen nicht etwa für den Kapitän, sondern für jeweils eine trächtige Muttersau bestimmt waren, die die Wikinger auf ihren Weltreisen mitzunehmen gewohnt waren.
Auch in fernen Landen wollten sie nämlich nicht auf ihr geliebtes Spiel SCHWEINEREI verzichten. Ursprünglich wurde es bei den rauhen Eroberern so gespielt, daß man mehrere lebende Schweine in die Luft warf und aus ihrer Stellung bei der Landung den Sieger des Spiels ermittelte (unbewiesen ist bislang die Theorie, daß das Kinderspiel „Figurenwerfen" eine über die Jahrtausende versaute Form der SCHWEINEREI ist).



Auf den langen Seereisen fehlte nun an Bord der Platz, um mehrere Schweine mitzunehmen. Man half sich, indem man die bereits erwähnte trächtige Sau mitnahm und ihren Wurf im neuentdeckten Land großzog. Die ereignislose Zwischenzeit vertrieben sich die Wikinger mit täglichem „Sau-Gucken": Sie schauten nach, ob die Ferkel schon groß genug für eine kleine SCHWEINEREI waren.
(Später, als das Spiel längst vergessen war, konnten die Menschen mit dem Begriff „Sau-Gucken-Zeit" nichts mehr anfangen und verballhornten ihn zu „Saure-Gurken-Zeit".)

Durch die Hinweise von Professor S. Ch. Nitzel gelang es in den späten siebziger Jahren, einige bisher rätselhafte Runen-Inschriften zu entziffern.
So beklagt sich ein gewisser Hauptmann Hövar darüber, daß seine pflichtvergessenen Krieger nächtelang SCHWEINEREI betrieben. Und das nördlich des Polarkreises, wo eine Nacht immerhin 180 Tage lang sei.
Verständlich wird nunmehr auch ein Lied des Sängers Adgir, in dem er die Wikinger als „Sauhaufen" bezeichnet.

Weil die Lust der Wikinger an SCHWEINEREI schließlich so überhandnahm, daß darunter die Eroberungsgeschäfte litten, erließ das Thing (der damalige Bundestag) ein Gesetz, das das Spielen mit lebenden Schweinen mit hohen Steuern belegte.
Die Wikinger umgingen das Gesetz, indem sie fortan SCHWEINEREI mit aus Schweineknöcheln geschnitzten Schweinchen spielten. Daraufhin wurde auch das Spielen mit geschnitzten Schweinen besteuert.
Das war der Anfang vom Ende: Die kunstvoll gefertigten Schweinchen verkamen zu einfachen Würfeln. Und für lange, lange Zeit erinnerten nur noch die Begriffe wie „Schwein haben" oder „knobeln" (= knöcheln) an die große Zeit genußreicher SCHWEINEREI.
Jetzt aber können wir endlich SCHWEINEREI spielen, daß die Schwarte kracht: MB hat nach den authentischen Unterlagen von Professor S. Ch. Nitzel das Spiel mit allen Regeln wieder zusammengeferkelt. Wir wünschen viel Schwein und säuischen Spaß!

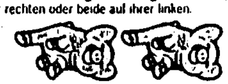
SPIELREGELN

- Das Deckblatt des Blöckchens abtrennen und für die Punktwertung aufheben.
- Ein Spieler wird für das Aufzeichnen der erzielten Punkte bestimmt. Die Punktwerte hängen von der Lage der Schweinchen nach dem Wurf ab: Je „schwieriger" die Lage, desto mehr Punkte zählt der Wurf.
- Es wird ausgeworfen, wer das Spiel beginnt. Dieser Spieler wirft nun beide Schweinchen zusammen auf eine ebene Fläche und merkt sich den Wert des Wurfs (siehe Wertung), falls er weiterwerfen will.
- Jeder Spieler darf in seinem Durchgang solange weiterwerfen, bis er <u>entweder</u> aufhören möchte (dann wird ihm die Summe aller Würfe dieses Durchgangs vom Aufschreiber gutgeschrieben) <u>oder</u> „FAULE SAU" wirft (dann wird sein ganzer Durchgang mit 0 bewertet) <u>oder</u> „SAUHAUFEN" wirft (dann verliert er alle Punkte aus allen bisherigen Durchgängen dieses Spiels) <u>oder</u> „SCHWEINEREI" wirft (dann scheidet er ganz aus dem Spiel aus).
- Am Ende des Durchgangs notiert der Aufschreiber die Summe der erzielten Punkte und addiert sie zu den Punkten, die er dem betreffenden Spieler bisher bereits gutgeschrieben hatte. Der Spieler gibt die Schweinchen an den Mitspieler zu seiner Linken weiter, und nun beginnt dieser mit seinem Durchgang.

DIE WERTUNG

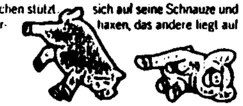
FAULE SAU: 0 Punkte
Die Schweinchen liegen auf der Seite, eins auf seiner rechten, eins auf seiner linken. Der Durchgang zählt 0 Punkte, und der nachste Spieler ist dran.

SAU: 1 Punkt
Die Schweinchen liegen auf der gleichen Seite, beide auf ihrer rechten oder beide auf ihrer linken.



HAXE: 5 Punkte
Ein Schweinchen landet auf allen vieren, das andere liegt auf der Seite

SCHNAUZE: 10 Punkte
Ein Schweinchen stützt sich auf seine Schnauze und beide Vorderhaxen, das andere liegt auf der Seite.



VOLLE SCHNAUZE: 40 Punkte
Beide Schweinchen stützen sich jeweils auf Schnauze und Vorderhaxen

BACKE: 15 Punkte
Ein Schweinchen lehnt auf Schweinebacke, Schweinsohr und einer Vorderhaxe
Das andere liegt auf der Seite.

SCHWEINEREI: Ausscheiden
Da diese Position in der Natur nicht vorkommt, muß der Spieler sofort ausscheiden!

GEWINNER DES SPIELS

Der Aufschreiber muß genau aufpassen: Wenn einer der Spieler beim Werfen 100 Punkte erreicht oder überschreitet, erklärt ihn der Aufschreiber zum Gewinner des Spiels.

SPIEL FÜR FORTGESCHRITTENE

Das Spiel lauft nach den Grundregeln. Ausnahme: Jeder Spieler (außer dem Werfenden) darf vor dem Wurf eines Mitspielers „SAUSTALL" rufen und auf den bevorstehenden Wurf wetten.

DOPPELHAXE: 20 Punkte
Beide Schweinchen landen auf allen vieren.

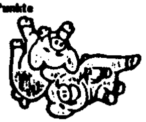
HALBE SUHLE: 5 Punkte
Ein Schweinchen liegt auf dem Rücken, das andere auf der Seite.

VOLLE SUHLE: 20 Punkte
Beide Schweinchen liegen auf dem Rucken.

DOPPELBACKE: 60 Punkte
Beide Schweinchen lehnen jeweils auf Schweinebacke, Schweinsohr
und einer Vorderhaxe.

GULASCH: Kombinierte Punkte
Jede Kombination von HAXE, HALBE SUHLE, SCHNAUZE und BACKE. Die Einzelpunkte werden addiert. Beispiel:
HAXE – 5 Punkte,
plus SCHNAUZE – 10 Punkte, macht zusammen 15 Punkte

SAUHAUFEN: Zurück auf 0 Punkte
Beide Schweinchen berühren einander in irgendeiner Position. Der Spieler verliert alle Punkte, die er bisher im gesamten Spiel gemacht hat, und gibt die Schweinchen sofort an den nächsten Spieler weiter.



A Sagt er den Wurf richtig vorher, bekommt er das Doppelte der geworfenen Punkte gutgeschrieben. Der Spieler hingegen bekommt ebensoviele Punkte (also auch das Doppelte der geworfenen) abgezogen. (Unter 0 Punkte kann er jedoch nicht absinken!) Und er gibt die Schweinchen sofort an den nächsten Spieler weiter.

B Hat der Wetter den Wurf hingegen falsch vorhergesagt, bekommt er das Doppelte der tatsächlich geworfenen Punktzahl abgezogen (auch er kann dabei nicht unter 0 Punkte sinken!), während der Spieler die Pluspunkte aus seinem Wurf ebenfalls verdoppeln darf.

Zu beachten: Pro Wurf darf es nur einen „SAU WETTER" geben. Wer also zuerst „SAUSTALL" ruft, der darf auf den bevorstehenden Wurf eines Mitspielers als einziger wetten. Und: Er muß bereits mindestens 20 Punkte auf seinem Konto haben, um überhaupt wetten zu dürfen. Ruft er aber „SAUSTALL", obwohl er weniger als 20 Punkte hat, dann dürfen Mitspieler und Aufschreiber nicht auf seine mangelnde Punktzahl hinweisen. Merkt nämlich der Werfende nichts und wirft die Schweinchen trotzdem, dann gilt die Wette als angenommen.
In jedem Fall bleibt der Spieler solange am Wurf, bis er aufhören möchte, „FAULE SAU", „SAUHAUFEN" oder „SCHWEINEREI" wirft (siehe Grundregeln), oder sein Wurf von einem „SAU WETTER" richtig vorhergesagt wurde