Ein Projekt zur beurteilenden Statistik mit Unterstützung des Computers

von Ute Mehlhase und Georg Schrage, Universität Dortmund

Zusammenfassung

Es wird ein Projekt zum Schätzen des Umfangs einer Population vorgestellt, das unter Ausnutzung von Computergraphik das Verständnis für statistische Aussagen fördern soll. Es ergeben sich Fragestellungen, die auf die Probleme des Testens von Hypothesen und der Konstruktion von Konfidenzintervallen führen. Unterschiedliche experimentelle Vorgehensweisen werden miteinander verglichen. Anhand wiederholter Simulationen und der grafischen Darstellung von Schätzwerten können statistische Methoden in exemplarischer Weise erarbeitet und anschaulich interpretiert werden.

1 Projektorientiertes Arbeiten im Stochastikunterricht

Die Darstellung von Mathematik in Büchern und Klassenzimmern wird oft als autoritär empfunden, was eine Ursache für die bekannten Abneigungen vieler Schüler gegenüber der Mathematik ist. Mathematik wird vielfach von hinten aufgerollt, als "fertige Mathematik"[1] verkauft. Nicht eine Aufforderung wie "Kommt, packen wir es an!", die einen Entdeckungsprozeß auslösen würde, spricht aus der mathematischen Lehre, sondern es klingt eher wie: "Schaut her, ich sage euch, wie es ist!". Schließlich müssen die meist isolierten Inhalte des Stoffplans abgearbeitet werden. Die Schüler lernen die Regeln eines Spiels, das sie praktisch niemals spielen dürfen.[2]

Freudenthal (1973) fordert eine 'beziehungshaltige' Mathematik: "Wenn ich über beziehungshaltige Mathematik spreche, so lege ich den Nachdruck auf Beziehungen zu erlebter Wirklichkeit, . . Die erlebte Wirklichkeit sollte das Skelett sein, das die mathematischen Erlebnisse verbinden."[3]

Es ist hier weniger wesentlich, welche mathematischen Inhalte vermittelt werden, wenn sie nur beziehungshaltig, 'Mathematik im Kontext' sind. Außerdem sollten sie stets paradigmatischen Charakter haben und typische Denkweisen und Methoden der Wissenschaft Mathematik aufzeigen.

Gerade bei der Erarbeitung stochastischer Inhalte erscheint aufgrund des ihnen immanenten Anwendungscharakters ein derartiges Vorgehen sinnvoll.

Hier geht man von einer realen Situation aus und muß im Projekt den Prozeß der Modellbildung, subjektive Einschätzungen und die Interpretationen der Ergebnisse miteinbeziehen. Dies gilt insbesondere auch für die beurteilende Statistik.

Einerseits sind ihr wahrcheinlichkeitstheoretische Problemstellungen inhärent, andererseits können durch sie moderne didaktische Forderungen an den Mathematikunterricht wie Mathematisierung, Förderung von Qualifikationen zur Übersetzung einer Problemstellung in ein mathematisches Modell und Beachtung des operativen Prinzips realisiert werden.[4)] Außerdem bietet gerade die beurteilende Statistik einen engen Bezug zur Realität, da uns ja täglich (pseudo-) statistische Argumente begegnen, die Schüler kritisch zu reflektieren lernen müssen.

Auffassungen, daß die Mathematik der beurteilenden Statistik viel zu schwierig wäre, um in der Schule behandelt zu werden, kann durch ein situationsbezogenes Erarbeiten zentraler Ideen statistischer Methoden und Konzepte mittels Simulationen dank der Verfügbarkeit des Computers entgegengetreten werden.

Kenngrößen statistischer Untersuchungen werden durch Simulation erzeugten Vergleichsdaten gegenübergestellt und diese dann auf dem Bildschirm graphisch veranschaulicht. So können zentrale für viele Schüler schwer vorstellbare Begriffe und Ideen der beurteilenden Statistik anschaulich mit Hilfe des Experiments erarbeitet werden.

Daß ein derartiger Zugang zum Stochastikunterricht keinen zusätzlichen Lehrstoff in die Schule tragen will, geschweige denn, nicht mit den Lehrplänen vereinbar wäre, belegen die

dort als Lernziele angeführten Begriffe wie 'Schätzen von Parametern', 'Testen von Hypothesen', 'Konstruktion von Konfidenzintervallen'.

In gängigen Schulbüchern für die Sekundarstufe II und auch die Sekundarstufe I dominiert eine rein theoretische Behandlung dieser Inhalte, deren Erfolg höchst unbefriedigend ist, wie zum Beispiel Befragungen von Studienanfängern belegen.

Diese grundsätzlichen didaktischen Überlegungen sollen anhand eines Projekts verdeutlicht werden.

2 Das Projekt

Dem Projekt liegt die generelle Fragestellung des Schätzens vom Umfang unbekannter Populationen zugrunde.

In den untersuchten Schulbüchern wird dieses Problem, meist - wenn überhaupt - über das Beispiel einer Urne, die eine unbekannte Anzahl schwarzer und weißer Kugeln enthält eingeführt. Es wird hier nach der Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel gefragt. Durch 'häufiges' Ziehen mit Zurücklegen soll diese geschätzt werden. Auf dieser Basis wird das Problem dann theoretisch erörtert und möglichst noch analytisch 'gelöst'.

Schrage (1981)[5)], der zu einer ähnlichen Fragestellung eine Unterrichtseinheit in einem Leistungskurs eines Gymnasiums durchgeführt hat, kommt dort über zahlreiche Experimente u.a. das sog. 'Taxi-Problem', bei dem die Anzahl von durchnumerierten Taxis einer Stadt anhand einer Stichprobe geschätzt werden soll, zu einer Untersuchung, bei der die Schüler einen Schätzwert für die Anzahl der in einem bestimmten Gebiet zugelassenen Kraftfahrzeuge ermitteln sollten.

Die Versuche wurden größtenteils auf dem Rechner simuliert und graphisch repräsentiert. Die Schüler wurden häufig mit Situationen konfrontiert, in denen Entscheidungen getroffen werden mußten, die aufgrund nicht vollständiger Informationen auch das Risiko von falschen

Entscheidungen beinhalteten. Die ausführliche Diskussion dieser Schritte brachte den Schülern fundamentale statistische Begriffe nahe.

Diese Ideen und Methoden haben wir hier aufgenommen und durch zusätzliche Fragestellungen erweitert bzw. modifiziert.

Nicht immer findet man beim Schätzen von Populationen wie beim 'Taxi-Problem' die günstige Ausgangslage vor, daß die zu zählenden 'Mitglieder' durchnumeriert sind, so etwa bei der Bestimmung des Fischbestandes in einem See oder der Anzahl von Exemplaren einer bestimmten Vogelart, etc.

Nach dem 2. Weltkrieg bis etwa 1960 z.B. verringerte sich die Anzahl der Blauwale in der Antarktis aufgrund des gestiegenen Öl-Bedarfs so erheblich, daß man versuchte, einen Überblick über deren Population zu bekommen.[6]

In derartigen Fällen bedarf es anderer Verfahren, um den Umfang N einer unbekannten Population zu schätzen.

Es könnte z.B. Interesse bestehen, nach einer Umweltkatastrophe in einem Naturschutzgebiet, bei der viele Tiere elendig verendet sind, die verbleibende Anzahl von Vögeln einer vom Aussterben bedrohten Art festzustellen oder zu prüfen, ob von den vorher sehr zahlreich vorhandenen Tieren noch wenigstens 1000 übriggeblieben sind. Hierzu werden zufällig ausgewählte Vögel gefangen, mit einem Ring versehen und diese beringten Vögel bei erneutem Fang gezählt. Zur Einführung im Unterricht läßt sich dieses Problem durch eine Urne mit einer großen Anzahl von gleichartigen Kugeln vorstellen.

Unterschiedliche Aufgaben können gestellt werden:

Problem 1 : Stelle eine Vermutung über die Anzahl N der Kugeln in der Urne an, und ermittle einen Schätzwert N für N (wie ?, unterschiedliche Verfahren ?).

Problem 2 : Teste der Vermutung bzw. Schätzung entsprechende Hypothesen.

Problem 3 : Gib ein Konfidenzintervall für den Parameter N an.

Problem 4 : Vergleich mit dem 'Taxi-Problem'

zu Problem 1 : Ermittlung eines Schätzwerts

Zwei mögliche Experimente, die Informationen über N liefern, sollen hier vorgestellt werden.

1. Verfahren

Ziehe k_1 Kugeln, markiere sie, und lege die Kugeln zurück in die Urne. Danach ziehe eine Stichprobe von k_2 Kugeln, und zähle die in dieser Stichprobe enthaltenen markierten Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig aus der Urne gezogene Kugel markiert ist, ist

$$p = k_1 / N \quad \text{Wahrscheinlichkeit für eine markierte Kugel}$$

Die Anzahl der in der Stichprobe enthaltenen markierten Kugeln ist die Realisierung einer zufälligen (hypergeometrisch verteilten) Größe Z. Der Erwartungswert für Z ist

$$E(Z) = k_2 \cdot k_1 / N \quad \text{Erwartungswert für Z}$$

Schätzverfahren : Einen Schätzwert für den Anteil $p = k_1/N$ der markierten Kugeln erhält man durch $p = z/k_2$ (Standardverfahren). Das legt es nahe, die Population $N = k_1/p$ durch $N = k_1 \cdot k_2 / z$ zu schätzen.

$$N = k_1 \cdot k_2 / z \quad \text{Schätzfunktion 1}$$

Es handelt sich hierbei um eine Maximum-Likelihood-Schätzung. (Falls N nicht ganzzahlig ist, wird man für die Angabe eines Schätzwertes N durch die nächstgelegene ganze Zahl ersetzen.)[7]

2. Verfahren

Ziehe k Kugeln mit Zurücklegen und kennzeichne diese Kugeln. Notiere, wenn eine bereits markierte Kugel erneut gezogen wird. Sei z die Anzahl der Kugeln, die schon markiert waren. Dann ist $v = k - z$ die Anzahl der verschiedenen Kugeln in der Stichprobe.

$N - v$ ist die Anzahl der Kugeln, die nicht gezogen wurden. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Kugel nicht in der Stichprobe enthalten ist, ist

$$p = (1 - 1/N)^k$$

Mit U bezeichnen wir die zufällige Größe, die durch die Anzahl der nicht markierten Kugeln realisiert wird. Der Erwartungswert für diese Anzahl ergibt sich aus

$$E(U) = N\,(1 - 1/N)^k = N - k + E(Z)$$

Dabei ist Z die zufällige Anzahl der schon markierten Kugeln, die man beim Ziehen der Stichprobe findet. Daraus folgt:

$$E(Z) = N\,(1 - 1/N)^k - N + k$$

Das legt es nahe, den Schätzwert N gemäß

$$z = N\,(1 - 1/N)^k - N + k \quad \text{Schätzfunktion 2}$$

zu bestimmen.

Aus dieser Gleichung ist N zu ermitteln, was Schüler jedoch 'von Hand' nicht leisten können. Mit dem Computer oder Taschenrechner bietet es sich an, N durch ein einfaches Intervallhalbierungsverfahren für verschiedene Werte von z zu bestimmen.

Die folgenden Bilder 1 und 2 zeigen den Verlauf der beiden Schätzfunktionen mit $k_1 = k_2 = 200$ für Schätzfunktion 1 und $k = 400$ für Schätzfunktion 2.

Wendet man die Verfahren an, um den Bestand einer Population von Vögeln näherungsweise

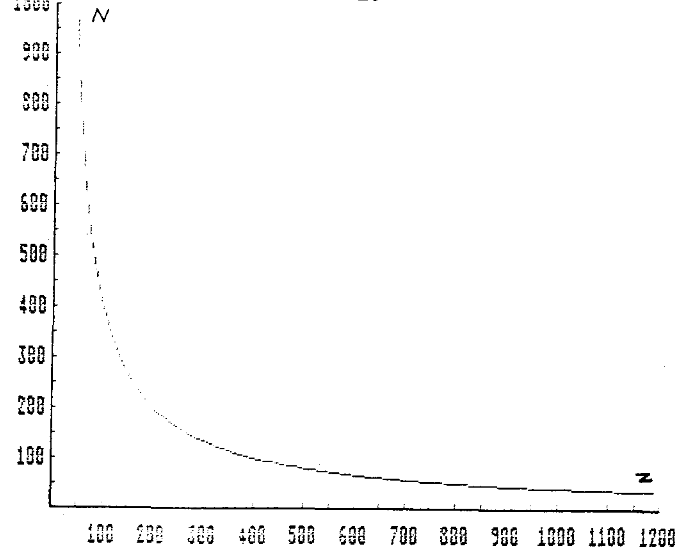

Bild 1 : Schätzfunktion 1

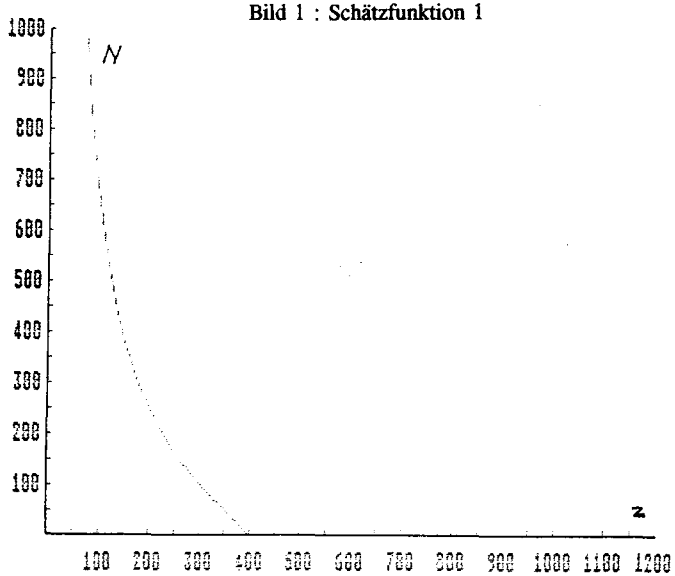

Bild 2 : Schätzfunktion 2

zu ermitteln, so wird in beiden Fällen die stochastische Beziehung zwischen der Anzahl N der Vögel und der Anzahl der beringten Vögel in der Stichprobe durch ein mathematisches

Modell beschrieben. Bei der Modellannahme gehen schon einige Voraussetzungen über die Realität ein, etwa daß alle im Gebiet vorkommenden Vögel mit gleicher Wahrscheinlichkeit gefangen werden können oder daß die beringten Vögel nicht auch schon krank waren und damit evtl. keine Aussicht auf einen erneuten Fang bieten.

Es kann hier deutlich gemacht werden, daß eine Modellannahme nicht per se durch einen Sachverhalt festgelegt, sondern das Ergebnis einer subjektiven Entscheidung ist. D.h. Schlußfolgerungen, die aus dem Modell abgeleitet werden, gelten nicht in gleicher Weise für die Realität (distanzierte Rationalität)[8]. Diese Einsicht läßt sich in exemplarischer Weise in einem derartigen Stochastikunterricht vermitteln.

Der steile Verlauf der Schätzfunktionen, wie ihn die Abbildungen 1 und 2 zeigen, läßt erkennen, daß Schwankungen bei der Zufallsgröße Z eine verstärkte Streuung bei der zugehörigen Schätzgröße *N* bewirken. Trotzdem sagen die Schätzfunktionen den Schülern wenig über die Qualität des jeweiligen Verfahrens. Diese wird augenfällig, wenn man die zufallsbedingten Schätzwerte in einer großen Anzahl von Experimenten (hier 100) ermittelt und graphisch darstellt.[9]

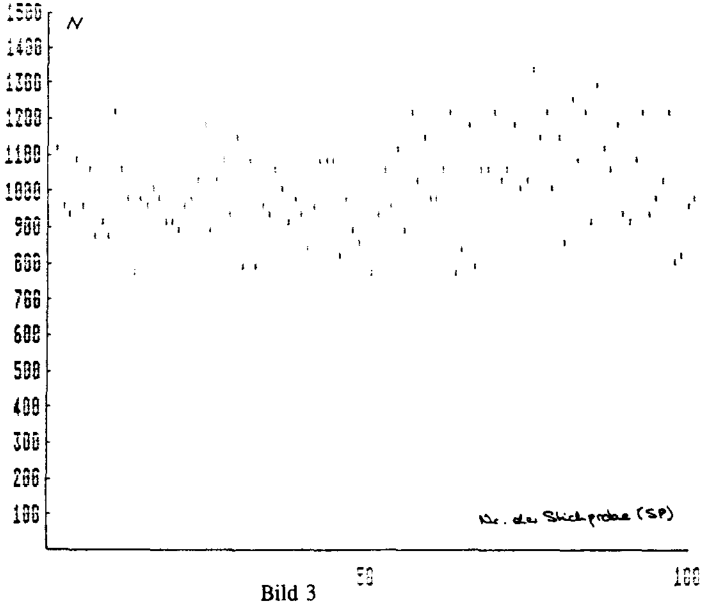

Bild 3

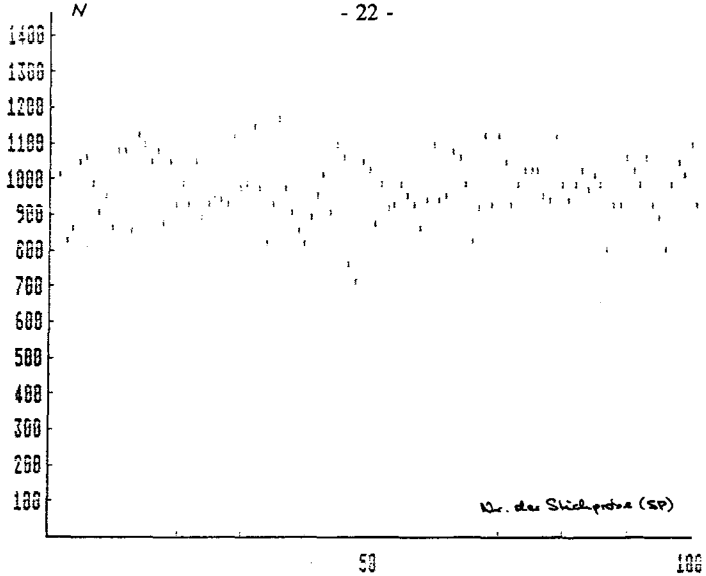

Bild 4

Derartige Graphiken sind wertvolle Hilfen, um Eigenschaften von Schätzfunktionen wie Erwartungstreue und Konsistenz zu veranschaulichen und zu diskutieren. Das vorliegende Beispiel macht allerdings auch Grenzen der Visualisierung deutlich. Die Streuung der Punkte um den Parameter N = 1000 in Bild 3 erweckt den Anschein, als handle es sich bei der Funktion $N = k_1 \cdot k_2 / z$ um einen erwartungstreuen Schätzer. Dieser Eindruck trügt jedoch. Sofern $N > k_1 + k_2$ ist, nimmt die Zufallsvariable Z mit positiver Wahrscheinlichkeit den Wert 0 an. Das bedeutet aber, daß N keinen endlichen Erwartungswert hat. Entsprechendes gilt auch für die zweite Schätzfunktion.

Diese Tatsache läßt sich ebenfalls anhand der Funktionsgraphen einsehen. Strebt z gegen Null, so nähert sich der Graph asymptotisch der y-Achse.

zu Problem 2 : Testen von Hypothesen

Die eingangs gestellte Frage, ob noch 1000 Exemplare einer Vogelart existieren, legt es nahe, zwei Hypothesen gegenüberzustellen:

$H_0 : N \geq 1000$

$H_1 : N < 1000$ [10]

Für das Entscheidungsverfahren bietet sich wiederum an, das Verhalten der Testgröße in einer Simulation zu untersuchen.

Nehmen wir an, man will eine bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art (nämlich die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl die Anzahl der Vögel 1000 oder sogar größer ist) von höchstens 5% akzeptieren. (Das Signifikanzniveau wird aufgrund praktischer Erwägungen, die sich an den Konsequenzen möglicher Fehlentscheidungen orientieren, festgelegt.) Mit $N = 1000$ ergeben sich folgende Computergraphiken:

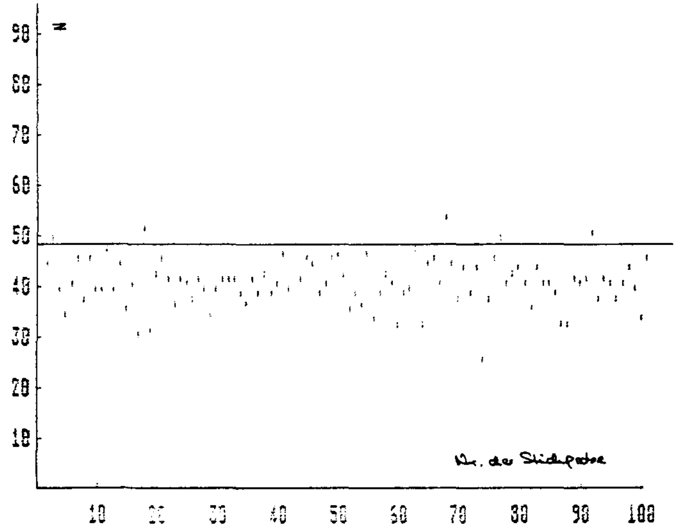

Bild 5 : 100 Simulationen nach dem ersten Verfahren für z

Die Graphiken motivieren folgende Entscheidungsregeln:

Die Nullhypothese soll verworfen werden, wenn die Testgröße Z beim ersten Verfahren den Wert 48 überschreitet. Beim zweiten Verfahren legt das Simulationsergebnis nahe, die Gren-

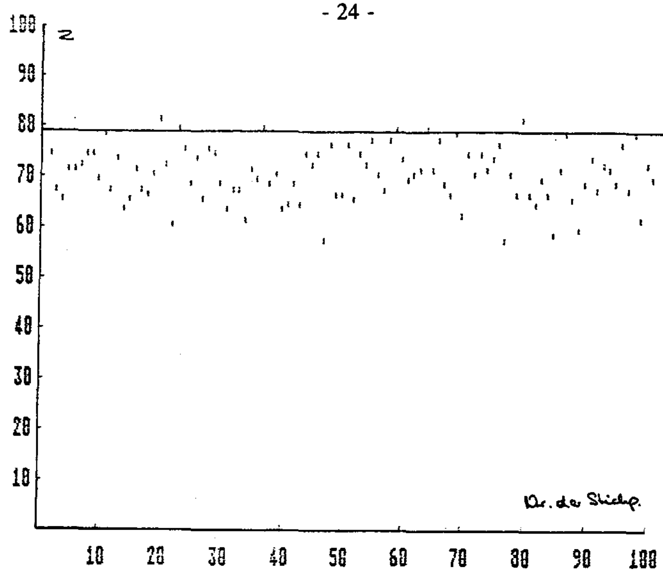

Bild 6 : 100 Simulationen nach dem zweiten Verfahren für z

ze etwa bei 79 zu ziehen.

Die exakte Rechnung zeigt, daß die kritische Grenze für die Anzahl der markierten Vögel in der Stichprobe bei 50 im ersten Verfahren und bei 80 im zweiten Verfahren liegt.

An dieser Stelle muß auch unbedingt deutlich gemacht werden, daß der Hypothesentest nicht den Schluß zuläßt, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% bei einer Anzahl von höchstens 50 bzw. 80 beringten Vögeln mindestens 1000 Vögel die Katastrophe überlebt haben, bzw. daß es mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% nur noch weniger als 1000 Vögel gibt.

Verwirft man die Nullhypothese, so handelt es sich vielmehr um eine Entscheidung, die auf der simplen Tatsache basiert, daß ein unwahrscheinliches Ereignis nur selten eintritt.

zu Problem 3 : Konstruktion von Konfidenzintervallen

Die 'Lehrbuchstatistik' führt jetzt zur 'Konstruktion' von Konfidenzintervallen. Anhand von Beispielen, in denen der Erwartungswert für Binomial- oder Normalverteilungen geschätzt wird, soll diese Schätzung nun beurteilt werden. Es werden Schemata entwickelt, um rechnerisch ein Vertrauensintervall zu ermitteln. Wenn schließlich versucht wird, die Bedeutung von Konfidenzintervallen zu interpretieren, geschieht dies häufig höchst mißverständlich bzw. für den Schüler, der mit Konfidenzintervallen als Werkzeug statistische Aussagen kritisch zu reflektieren lernen soll, nahezu unverständlich. In einem Schulbuch z.B. findet sich folgende Aussage: "Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% überdeckt das Intervall [21.94 , 22.26] den unbekannten Prameter μ_x . Beachten Sie: Sprechweisen wie 'μ_x liegt mit Wahrscheinlichkeit 0.95 im Intervall [21.94 , 22.26]' sind mißverständlich. μ_x ist keine Zufallsvariable, sondern eine feste Zahl."[1] Diese beiden Formulierungen sind jedoch vollkommen identisch und zudem noch falsch: Das Konfidenzniveau macht keine Aussage darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein konstantes Intervall den wahren Parameter überdeckt.

Viele Schüler werden an dieser Stelle weder den Überblick haben, 'die Sache mit den Konfidenzintervallen zu verstehen', noch den Mut besitzen und eine Veranschaulichung verlangen, sondern wahrscheinlich verwirrt und frustriert nach Hause gehen, die Formeln zur Berechnung von Konfidenzintervallen lernen, um für die nächste Klassenarbeit gerüstet zu sein und danach getrost alles vergessen zu können.

Die Frage ist also: Wie motiviere ich das für kritische Beurteilung von statistischen Aussagen höchst wichtige Thema 'Konstruktion von Konfidenzintervallen' ?

Hierzu eine Aufgabe aus einem Schulbuch der 7. Klasse (siehe Bild 7 auf der folgenden Seite).[2]

Die Kinder werden eifrig rechnen, 'schöne' Schätzwerte ermitteln und zur nächsten Aufgabe übergehen. Die 'Güte' der Schätzwerte bleibt undiskutiert. Um die Wertlosigkeit, ja sogar die Kontraproduktivität für die oben dargestellten Ziele des Stochastikunterrichts aufzuzeigen, haben wir einmal einen Schätzwert ermittelt :

$$\text{Für } k_1 = k_2 = 150 \text{ und } z = 5 \text{ ergibt sich } N = 4500 .$$

Für diesen Wert N = 4500 simulieren wir den Versuch mit einer Stichprobe von $k_1 = k_2$

Ein See enthält viele Fische. Wie viele es genau sind, kann man nur erfahren, wenn man den See trocken legt und alle Fische zählt. Begnügt man sich mit einer Schätzung der Anzahl, so kann man die „Fang-Wiederfang-Methode" verwenden:
Man fängt z. B. 100 Fische, markiert sie mit einem Farbfleck oder auf eine andere geeignete Weise und setzt sie wieder in den See hinein. Nach einiger Zeit fängt man noch einmal 100 Fische und zählt, wie viele darunter markiert sind. Aus dieser Anzahl schätzt man die Anzahl n aller Fische im See.

a) Welchen Schätzwert für n soll man bei den in der Tabelle angegebenen Werten wählen?

Fangzahl in beiden Fängen	100	100	100	150	150	150
Anzahl der markierten Fische im zweiten Fang	10	8	15	10	5	15

Bild 7

= 150 . Es ergibt sich folgender Versuchsausfall (siehe Bild 8) .

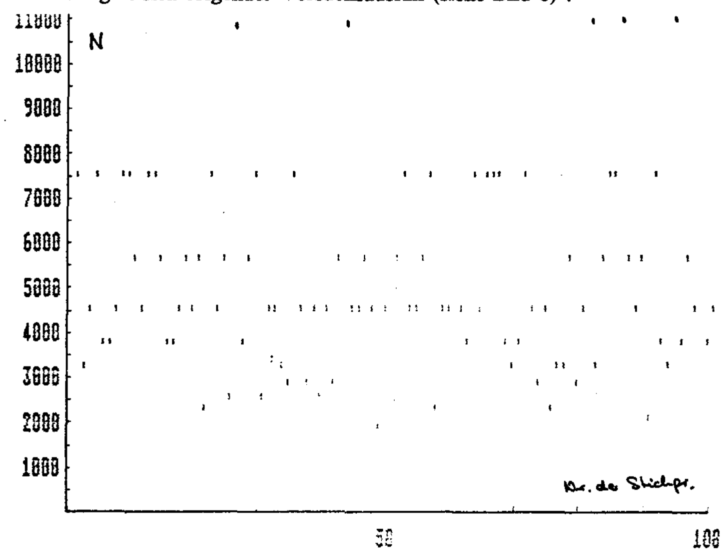

Bild 8

(Anmerkung: Die großen Sprünge zwischen den Werten der folgenden Graphiken und die Beschränkung auf nur wenige Werte ergeben sich aus dem Algorithmus für die Schätzfunktion $N = k_1 \cdot k_2 / z$.)

Interessant wird jetzt die Betrachtung von Konfidenzintervallen. Mit der Fragestellung: 'Welche Werte für N sind bei einer Wahrscheinlichkeit von 95% immer noch verträglich mit dem ermittelten Schätzwert $N = 4500$? (Die Wahrscheinlichkeit, den wahren Parameter N dabei auszuschließen, soll höchstens 5% sein.)' kommt man durch sukzessives Verändern des Parameters N zu folgendem Ergebnis (siehe Bild 9a):

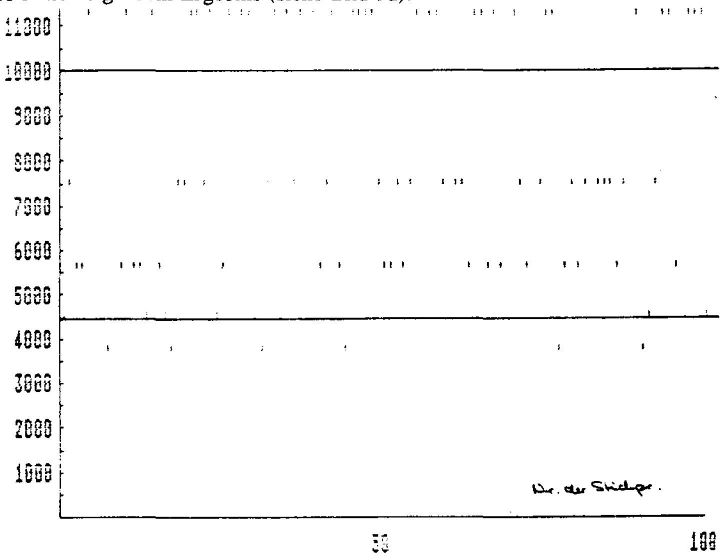

Bild 9 a

Bei einem Parameter von N = 2250 liegen noch immer bei sechs Stichproben die N-Werte bei 4500 oder darüber. N = 2250 ist also durchaus mit dem Versuchsergebnis $N = 4500$ verträglich. (Damit ist gemeint, daß bei N = 2250 die Wahrscheinlichkeit einen Schätzwert $N \geq 4500$ zu erhalten, größer als 5% ist.) Die gleiche Untersuchung kann man für Parameter N größer als 4500 durchführen und erhält wiederum nach fortgesetzter Variation des Parameters das folgende Ergebnis (siehe Bild 9b) :

Es ergibt sich also ein Konfidenzintervall von [2250 , 10000] , was nun sehr anschaulich deutlich macht, was der Ausgangsschätzwert leistet und wie wichtig die durchgeführte Diskussion ist. In einfacher Weise entwickelt der Schüler hier selbst <u>die inhaltliche Bedeutung des Konfidenzintervalls</u> , und zwar in einer Anschaulichkeit, die einerseits in den eigenen

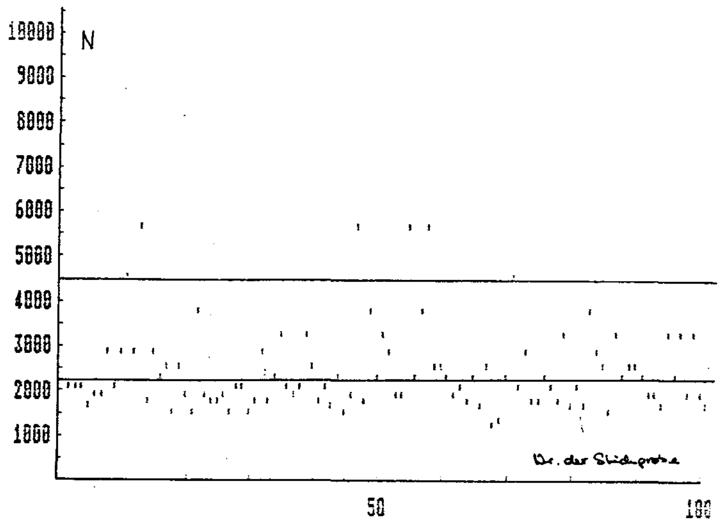

Bild 9 b

Versuchen, also im Entdeckungsprozeß als auch in dem Ergebnis, nämlich der 'fertigen' Computergraphik begründet liegt.

Die Unzulänglichkeit der untersuchten Schätzung dürfte Motivation genug sein, nun die eigenen Schätzungen auf Konfidenzintervalle zu überprüfen. Das Verfahren ist bekannt, und die Schüler werden für N = 1000 zu den folgenden Ergebnissen kommen (siehe Bilder 10a und 10 b , ferner Bilder 11a und 11b). Verfahren 1 liefert ein Konfidenzintervall [800,1200]. Das zweite Verfahren ergibt ein Vertrauensintervall [875,1150].

Beim zweiten Verfahren erhalten wir also hier etwas günstigere Werte. Bei einer konkreten Anwendung wird die Entscheidung für das eine oder andere Verfahren vor allem davon abhängen, welche Fangmethoden zur Verfügung stehen. Will man den Bestand an Fischen in einem See ermitteln und benutzt zum Fischfang ein Schleppnetz, so bietet sich die erste Methode an (vorausgesetzt, es handelt sich um einen See mit einer relativ großen Anzahl von Fischen). Das zweite Verfahren ist dann angebracht, wenn Tiere einmal gefangen und markiert werden, was sich in der Praxis wohl meistens eher realisieren lassen wird.

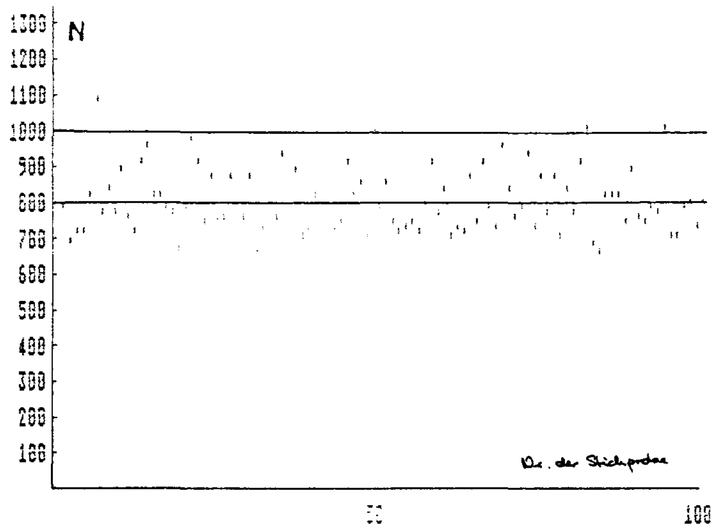

Bild 10 a

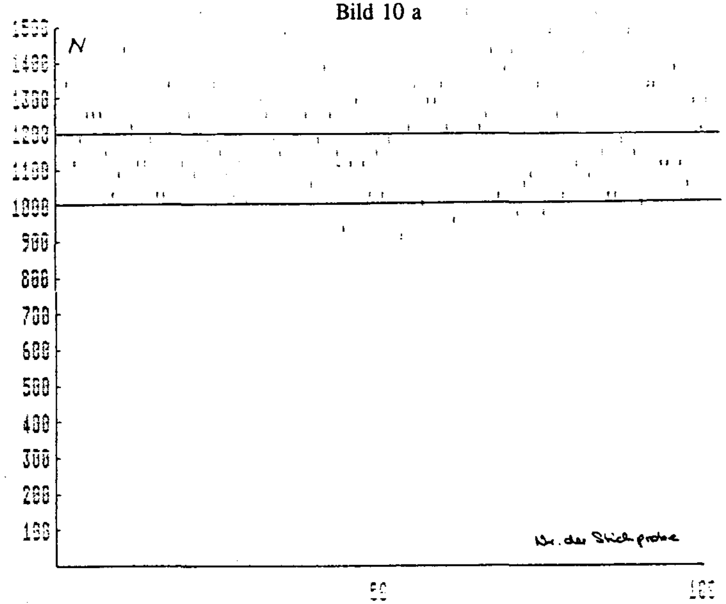

Bild 10 b

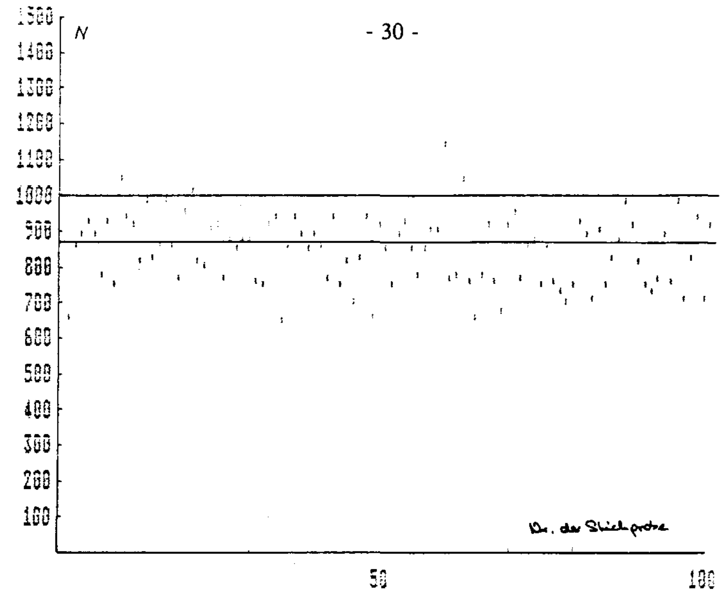

Bild 11 a

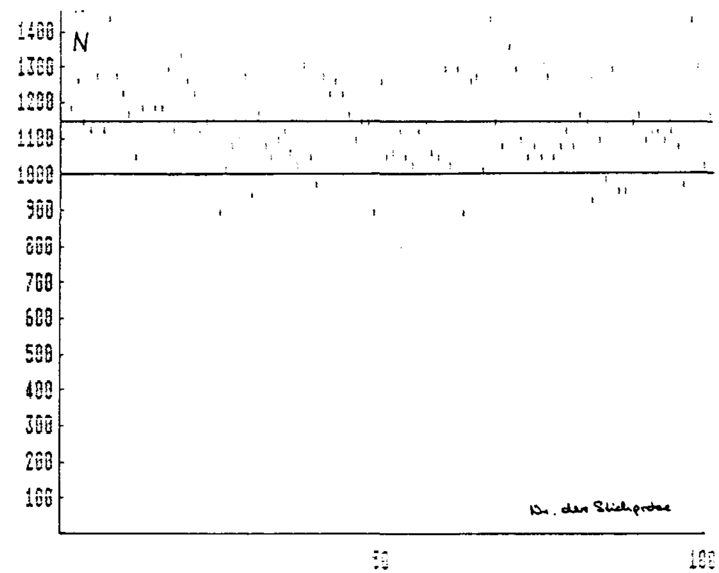

Bild 11 b

Insgesamt zeigt unsere Untersuchung jedoch, daß beide Verfahren stark streuende Schätzwerte liefern. Aussagen, die aufgrund derartiger 'capture-recapture'-Methoden gewonnen werden, sollten deshalb mit großer Vorsicht beurteilt werden. (Obwohl capture-recapture-Methoden in gängigen Lehrbüchern als Standardverfahren behandelt werden, wird in der statistischen Praxis doch nur selten Gebrauch davon gemacht.

zu Problem 4 : Vergleich mit dem 'Taxi-Problem'

Ein Vergleich der beiden Verfahren mit dem Taxi-Problem liegt nahe. Bei einer Stichprobe von $k = 10$ (Anzahl der Taxis) ergibt sich für $N = 1000$ folgende Simulation, die schon annähernd mit den Ergebnissen zu vergleichen ist, die bei den anderen beiden Verfahren bei einem Stichprobenumfang von 400 erreicht werden (siehe Bild 12). (Es handelt sich wiederum um eine Maximum-Likelihood-Schätzung.)

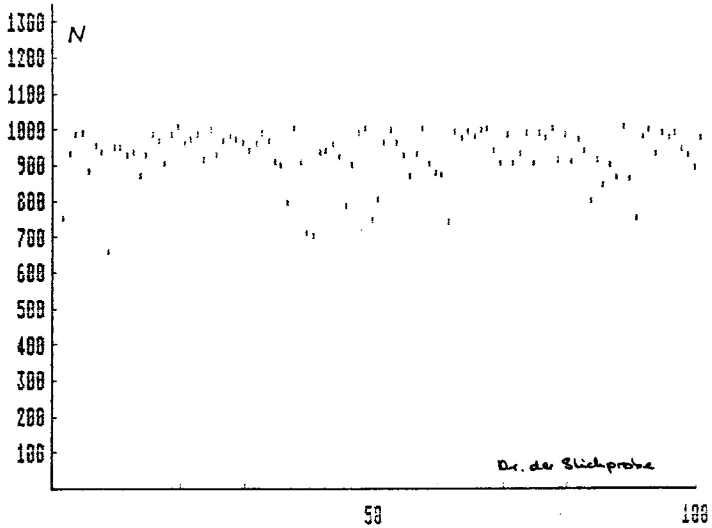

Bild 12

Diese Feststellung foldert eine erneute Variation der Parameter geradezu heraus. So wird dann auch das Ergebnis für $k = 400$ Staunen hervorrufen (siehe Bild 13), was zusätzlich einen positiven nachhaltigen Lerneffekt haben wird. Denn das Beeindruckende ist nur im Zu-

sammenhang der ganzen Thematik erfahrbar, d.h. entweder wird alles Gelernte vergessen oder aber das Gefüge kann als Ganzes über derartige Höhepunkte rekonstruiert werden.

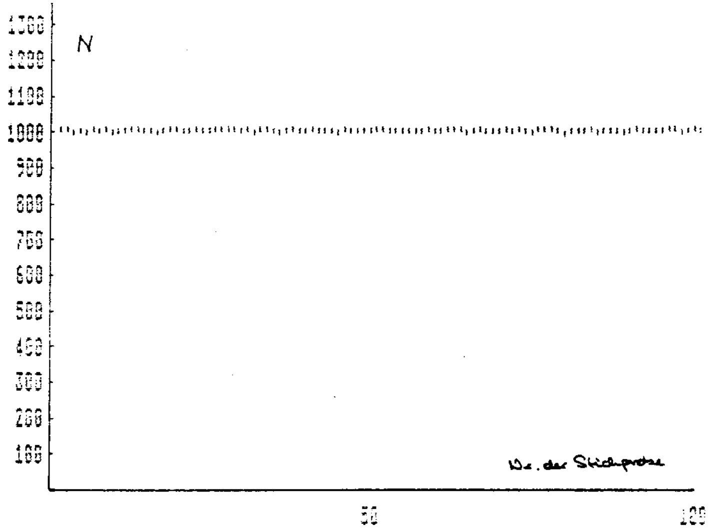

Bild 13

Auch kann dieser doch recht erstaunliche Unterschied Grundlage für die Behandlung von Problemen der Registrierung von Objekten, sprich Datenschutz u.ä. im Politik- bzw. Sozialkundeunterricht sein und so zu einer fächerübergreifenden Thematik werden.

3 Schlußbemerkung

Vermutlich wird manch einer statistischen Urteilen, die auf den Ergebnissen von Simulationen beruhen, mit Skepsis gegenübertreten, sie allenfalls als Notlösung akzeptieren, wenn analytische Methoden nicht zugängig sind.

Wenn ich die Fahrzeit eines Zuges, von dem ich weiß, daß er mit einer Geschwindigkeit von etwa 120 km/h fährt, zu einem 200 km entfernten Zielort wissen möchte, so berechne ich diese Zeit als Lösung der Gleichung $120 \cdot t = 200$. Ich kann die Fahrzeit aber auch experimentell bestimmen, indem ich bei einigen Fahrten die Zeit nehme und das arithmetische

Mittel berechne - und wohl niemand wird die so erhaltene Antwort auf die Frage nach der Fahrzeit des Zuges für weniger adäquat halten, als das Ergebnis obiger Rechnung, auch wenn beide Ergebnisse schwerlich übereinstimmen dürften.

Berechne ich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, so ist das Ergebnis ein Schätzwert für die relative Häufigkeit des Ereignisses in einer längeren Versuchsreihe. Es ist nicht einzusehen, daß ein Urteil, das ich aufgrund eines rechnerischen Schätzwertes für die relative Häufigkeit dieses Ereignisses fälle, in irgendeiner Weise besser fundiert ist als ein Urteil, das auf einer direkten Beobachtung einer langen Serie von Versuchsergebnissen basiert. Dies gilt um so mehr, wenn man berücksichtigt, daß die reale Problemsituation, in der die Entscheidung zu treffen ist, durch das mathematische Modell, das der Rechnung wie auch der Simulation zugrunde liegt, ohnehin nur näherungsweise beschrieben wird.

Entscheidender Vorteil der hier vorgeschlagenen Methode für den Unterricht aber ist, daß die Simulation und Computergraphik wesentlich beitragen zum Verständnis zentraler Begriffe und Ideen der beurteilenden Statistik.

4 Anmerkungen und Literatur

Anmerkungen

1) siehe Freudenthal, S. 110
2) siehe Goldenberg, S. 171.
3) siehe Freudenthal, a.a.O., S. 79
4) vgl. Borovcnik, S. 18
5) siehe Schrage
6) vgl. Chapman
7) vgl. z.B. Engel, S. 148
8) vgl. D.W. Müller
9) Alle Simulationen basieren auf einfachen Programmen, die in der Programmiersprache TRUE BASIC entwickelt wurden.
10) Die Wahl von Null- und Alternativhypothese ergibt sich nicht zwangsläufig aus der Aufgabenstellung. Je nachdem, für welche der beiden möglichen Fehlentscheidungen die zugehörige Wahrscheinlichkeit einen vorgegebenen Wert nicht überschreiten soll, wird die Null- und damit die Alternativhypothese formliert werden.
11) Lambacher, Schweizer , S. 217
12) siehe Spektrum , S. 201

Literatur

BOROVCNIK, M. : Was bedeuten statistische Aussagen ? .- Wien 1984

CHAPMAN, D. G. : The Plight of the Whales .- In: Tanur, J.M., Mosteller, F. : Statistics. A Guide to the Unknown, Belmont 1989

ENGEL, A. : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd. 1 .- Stuttgart 1973

FREUDENTHAL, H. : Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1 .- Stuttgart 1973

GOLDENBERG, E.P. : Using Fractal Geometry to build a Spirit of Mathematical Inquiry .- In: Journal of Mathematical Behavior 8, 1989. S. 169 - 204.

LAMBACHER, SCHWEIZER : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik .- Klett 1977.

MÜLLER, D.W. : Thesen zur Didaktik der Mathematik .- In: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, 21, 1974, S. 164 - 169.

SCHRAGE, G. : Entscheiden und Begründen - Leitlinien für den Statistikunterricht .- In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Bd. 3, 1981, S. 179-208.

SPEKTRUM : Bd. 7, Frankfurt/Main, 1985.

TANUR, J.M., MOSTELLER, F. : Statistics. A Guide to the Unknown .- Belmont 1989