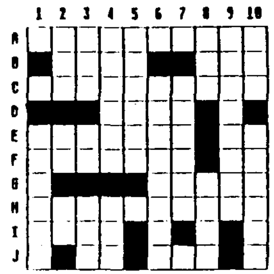
Stochastisches Schiffe–Versenken

von **Franz Hering**, Dortmund

Zusammenfassung: *Schiffe-Versenken* ist ein beliebtes Spiel, welches oft von Schülern *unter* der Schulbank gespielt wird. In dieser Arbeit soll eine Variante vorgestellt werden, welche dazu führen mag, daß es *auf* der Schulbank in Leistungskursen für Mathematik Eingang findet und dann dazu dient, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Spieltheorie zu vermitteln.

Das ursprüngliche Schiffe-Versenken wird nach folgenden Regeln gespielt: Es spielen zwei Spieler gegeneinander; wir nennen sie Spieler 1 und Spieler 2. Jeder zeichnet auf einem Blatt kariertem Papier eine Fläche von 10x10 Quadraten, seinen *Ozean*. Die Quadrate heißen *Felder*; sie werden indiziert, indem man etwa die Zeilen mit A bis J, die Spalten mit 1 bis 10 bezeichnet. Sodann zeichnet jeder Spieler verdeckt seine Schiffe ein. Ein *Schiff* ist eine senkrechte oder waagerechte Reihe nebeneinanderliegender Felder. Üblicherweise werden ein Schiff mit 4, zwei Schiffe mit 3, drei Schiffe mit 2 und vier Schiffe mit je einem Feld eingetragen. Zwei Schiffe dürfen keinen gemeinsamen Randpunkt besitzen. Ein typischer Ozean mit einer solchen Flotte sieht folgendermaßen aus:



Figur 1

Martialisches Ziel ist es, die gesamte Flotte des Gegners zu versenken. Dies geschieht nach folgenden Regeln:

1. Welcher Spieler beginnt, wird durch Übereinkunft festgelegt; wir nehmen an, daß dies Spieler 1 ist.

Stochastik in der Schule 12 (1992), Nr. 2, S. 21-29

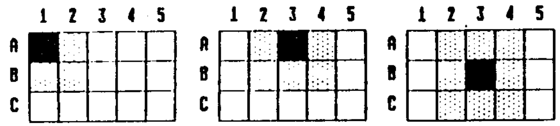
2. Spieler 1 beginnt, indem er auf ein Feld *schießt*. Er sagt, oder besser flüstert also etwa B3. Befindet sich auf dem Ozean des Spielers 2 dort ein Schiff, so wird dieses *getroffen* und Spieler 2 muß dies zugeben. Er teilt seinem Gegner jedoch nicht mit, *wie groß* das getroffene Schiff ist und *wie* es liegt. Jedoch muß er mitteilen, ob das letzte Feld eines Schiffes getroffen und es damit *versenkt* wurde. Spieler 1 bleibt solange im Spiel, wie er trifft. Dann kommt Spieler 2 dran.

3. Es wird solange alternierend weitergespielt, bis die gesamte Flotte eines Spielers versenkt ist; dieser hat dann verloren.

4. Jeder Spieler legt sich einen *Referenz-Ozean* an, indem der die Felder einträgt, auf die er geschossen hat, damit er nicht zweimal auf das gleiche Feld schießt. Außerdem trägt er diejenigen Felder ein, die einen Randpunkt mit einem bereits getroffenen Feld gemein haben. Diese Information ist deswegen wichtig, weil diese zu keinem *anderen* Schiff gehören können.

Ziel eines jeden Spielers ist es also, möglichst schnell, d.h. als erster, vollständige Information über den Ozean seines Gegners zu gewinnen. Jeder einzelne Schuß ergibt einen solchen Informationsgewinn; einmal natürlich über das berechnete Feld selbst; wenn man getroffen hat, aber auch über die angrenzenden Felder. Hat ein Spieler ein Schiff versenkt, so weiß er damit auch vollständig über die Umgebung dieses Schiffes Bescheid. Dies führt uns zu einem ersten interessanten strategischen Aspekt über die Verteilung der Flotte: Der Spieler 1 nimmt an, daß sein Gegner jedes Feld, über das er keine Infomation besitzt, mit gleicher Wahrscheinlichkeit beschießt. Für den ersten Schuß ist dann also jedes Feld des Spielers 1 für den Spieler 2 gleich gut, d.h. es wird mit Wahrscheinlichkeit 1/100 beschossen. Trifft Spieler 2 nicht, so hat er nur die Information gewonnen, daß auf dem beschossenen Feld kein Schiff ist; die übrigen 99 Felder sind also gleich wahrscheinlich. Spieler 2 wird also jedes dieser verbleibenden Felder mit Wahrscheinlichkeit 1/99 auswählen. Hat er jedoch mit seinem ersten Schuß etwa ein Schiff versenkt, welches nur aus einem Feld besteht, so hat Spieler

2 auch vollständige Information über alle an dieses Schiff anstoßenden Felder. Liegt dieses Schiff also nicht am Rand, so kennt er nun neun Felder, liegt es am Rand, aber nicht in der Ecke, so kennt er sechs und liegt es in der Ecke, so kennt er vier Felder. Um dem Spieler 2 also möglichst wenig Information über den verbleibenden Ozean für den Fall des Treffens zu vermitteln, scheint es daher für den Spieler 1 eine gute Strategie zu sein, seine Flotte möglichst am Rand oder möglichst zusammengedrängt zu postieren. Als ein Beispiel nehmen wir (für den Spieler 1) den folgenden kleineren 3x5 Ozean mit zwei Schiffen aus je einem Feld. (Nur ein Schiff, nämlich dasjenige, welches zuerst getroffen wird, ist eingezeichnet.)



Figur 2

Unter unserer Annahme, daß Spieler 2 jedes sinnvolle Feld mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählt, wird im ersten Schuß dieses eingezeichnete Schiff mit Wahrscheinlichkeit 1/15 getroffen. Wir nehmen dies an. Dann hängt die (so bedingte) Wahrscheinlichkeit, im nächsten Schuß das zweite Schiff zu treffen, von der Position des zuerst getroffenen Schiffes in folgender Weise ab: Ist das erste Schiff in einer Ecke, so wird das zweite mit Wahrscheinlichkeit 1/11 getroffen; ist das erste Schiff am Rande, aber nicht in einer Ecke, so wird das zweite Schiff mit Wahrscheinlichkeit 1/9 getroffen. Im dritten Fall ist die Trefferwahrscheinlichkeit 1/6.

Spieler 1 wird also seine Schiffe entweder beide in den Ecken placieren oder eins in eine Ecke, das andere auf dem Rand neben dieses mit nur einem unbesetzten Randfeld dazwischen. Diese Strategie ist jedoch nur dann gut, wenn der Spieler 1 gegen die Natur oder einen unintelligenten Spieler 2 spielt. Andernfalls wird der Spieler 2 die eben geschilderte Strategie des Spielers 1 erwarten und dadurch bevorzugt zunächst auf

Randfelder schießen. Dies macht den Vorteil der Randstrategie des Spielers 1 zunichte und verkehrt ihn sogar in einem entscheidenden Nachteil. Der Spieler 1 wird aber nun seinerseits erwarten, daß der Spieler 2 sich eine Randstrategie ausrechnet und entsprechend verfahren. Fährt man so fort, so wird die Bestimmung einer optimalen Strategie auf diese Weise immer verwickelter. Obwohl diese Betrachtungen einen interessanten Zusammenhang von Schiffe–Versenken zur Spieltheorie herstellen, sind sie doch nicht das Hauptanliegen dieser Arbeit. Wir wollen statt dessen folgende Variante des Schiffe–Versenkens untersuchen: Wenn ein Spieler auf ein Feld zielt, auf dem sich ein Schiff befindet, braucht er es deswegen noch nicht zu treffen, sondern er trifft es nur mit einer *Trefferwahrscheinlichkeit*. Wir wollen annehmen, daß diese Trefferwahrscheinlichkeit eine feste, vom Feld unabhängige Zahl p ($0 < p \leq 1$) ist. Der Fall $p = 1$ beschreibt also den bisherigen Fall; den allgemeinen wollen wir als Schiffe–Versenken *mit Zufall* bezeichnen.

Praktisch kann man den Spielablauf nun etwa wie folgt realisieren: Ist $p = 1/2$ und trifft Spieler 1 ein Feld, auf dem sich ein Schiff des Spielers 2 befindet, so wirft Spieler 2 zunächst einen fairen Würfel und sagt 'Treffer' bei ungerader, 'kein Treffer' bei gerader Augenzahl. Entsprechend verfährt Spieler 2. Hierbei ergibt sich jedoch folgende Schwierigkeit: Wenn Spieler 2 nur dann würfelt, wenn Spieler 1 ein Feld genannt hat, auf welchem ein Schiff ist, dann weiß Spieler 1 allein aus der Tatsache des Würfelns, daß sich dort — getroffen oder nicht — ein Schiff befinden muß. Diese Information ergibt keine interessante Variante; es werden sozusagen die Felder, auf denen sich die Flotte befindet, zunächst markiert und dann — was trivial wäre — anschließend noch, wenn nötig, abgeschossen. Es ist also wesentlich, daß die Spieler *nicht* erfahren, ob sie ein belegtes Feld getroffen haben, wenn das Schiff durch Würfeln nicht als getroffen gemeldet wird. Um dies zu erreichen, muß man nach *jedem* Schuß würfeln. Dies löst jedoch noch nicht alle praktischen Probleme. Beim deterministischen Schiffe–Versenken kann man nicht mogeln, denn der Referenz-Ozean hält alle Schüsse und deren Informationsgewinn fest. Anders beim Schiffe–Versenken mit Zufall. Hier kennt der Gegner das Resultat des Würfelns nicht, denn würde er es kennen, so wäre das Würfeln im Falle des Nichttreffens sinnlos. Die Annahme der Ehrlichkeit ist jedoch wohl nicht realistisch. Aus diesem Grunde bietet es sich an, Schiffe–Versenken mit Zufall vor allem als ein Spiel gegen einen Computer einzuführen. Es gibt verschiedene Varianten von Schiffe–Versenken als Computer-Spiele, teils auch als public domain. Eine Implementierung dieser Variante ist daher leicht durchführbar.

Was ist nun das Neue an diesem Modell? Zum ersten der Begriff der *Information*, welcher durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Referenz-Ozean beschrieben wird: Am Anfang weiß ein Spieler nichts über die Verteilung der Flotte seines Gegners. Dieses Nichtwissen drückt sich darin aus, daß er jedes Feld mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wählen wird. Die *a-priori-Wahrscheinlichkeit*, die dieses Nichtwissen beschreibt, ist also die Gleichverteilung. Schießt der Spieler auf das Feld A, so hat er *nach* dem ersten Schuß — ob er trifft oder nicht — einen Informations–Gewinn erzielt. Wir werden diesen im nächsten Abschnitt mit Hilfe einer a–posteriori–Wahrscheinlichkeit ausdrücken. Zum zweiten der Begriff der *optimalen Strategie*: Es wird gezeigt, welche Folgen von Schüssen den Erwartungswert der Dauer des Spiels minimieren. Zur Entwicklung dieser Begriffe ist es sinnvoll, nur das einfache Modell zu betrachten: Der Ozean des Spielers 2 enthält nur ein Schiff bestehend aus einem Feld. Wir betrachten ferner nur die Folge der Schüsse des Spielers 1; Spieler 2 kommt gar nicht dran.

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Seien $F_1, ..., F_m$ die Felder des Ozeans von Spieler 2. Zu Beginn nimmt der Spieler 1 eine Aufenthalts–Wahrscheinlichkeit

$$P_0 = [P_0(F_1), ..., P_0(F_m)]$$

an, welche bei Fehlen von Zusatz-Information die Gleichverteilung

$$P_0 = [1/m, ..., 1/m]$$

ist. Wir betrachten die folgenden beiden Ereignisse:

A_i : Das Schiff befindet sich auf Feld Nummer i.

B_j: Der Spieler 1 schießt auf Feld Nummer j und trifft nicht.

Es folgt

$$P_0(B_j|A_i) = \begin{cases} 1-p & \text{für} \quad i=j \\ 1 & \text{für} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Tritt B_j ein, so ergibt sich die a-posteriori-Aufenthalts- Wahrscheinlichkeit $P_1 = [P_1(F_1), \ldots, P_1(F_m)]$ nach der Bayes Formel:

$$\begin{aligned} P_1(A_j) &:= P_0(A_j|B_i) \\ &= \frac{P_0(B_i|A_j) \cdot P_0(A_j)}{\sum_{k=1}^m P_0(B_i|A_k)P_0(A_k)} \\ &= \frac{P_0(B_i|A_j) \cdot 1/m}{(m-1)\cdot 1 \cdot 1/m + (1-p)\cdot 1/m} \\ &= \frac{P_0(B_i|A_j)}{m-p} \\ &= \begin{cases} \frac{1-p}{m-p} & \text{für} \quad i=j \\ \frac{1}{m-p} & \text{für} \quad i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Ist z.B. $p = 1/2$, $m = 3$ und tritt B_1 ein, so ergibt sich

$$P_1(A_1) = 1/5, \quad P_1(A_2) = P_1(A_3) = 2/5.$$

Die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit P_1 beschreibt also den Informations-Gewinn durch den Fehlschuß B_1; das Schiff wird sich jetzt in A_1 nur mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit aufhalten. (Im Beispiel $P_0(A_1) = 1/3$, $P_1(A_1) = 1/5$). Wir nehmen an, daß Spieler 1 fortgesetzt nicht trifft. (Denn andernfalls wäre das Spiel beendet.) Dann erhalten wir eine Folge P_n von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten auf dem Ozean des Spielers 2: Es gilt also wie zuvor

$$\begin{aligned} P_n(A_j) &:= P_{n-1}(A_j|B_i) \\ &= \frac{P_{n-1}(B_i|A_j) \cdot P_{n-1}(A_j)}{\sum P_{n-1}(B_i|A_k)P_{n-1}(A_k)} \\ &= \begin{cases} \frac{(1-p)P_{n-1}(A_i)}{1-pP_{n-1}(A_i)} & \text{für} \quad i=j \\ \frac{P_{n-1}(A_j)}{1-pP_{n-1}(A_i)} & \text{für} \quad i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Rekursionsformel für P_n läßt sich durch eine einfache Induktion geschlossen lösen:

Sei P_0 die Gleichverteilung, sei $s(n,i)$ die Anzahl der Schüsse auf Feld Nummer i. Dann gilt:

$$P_n(A_j) = \frac{(1-p)^{s(n,i)}}{\sum_{k=1}^n (1-p)^{s(n,k)}}$$

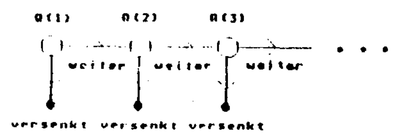
(Natürlich ist $\sum_{i=1}^n s(n,i) = n$).

Strategien

Hat der Spieler $(n-1)$-mal geschossen und ist das Spiel nicht beendet, so muß er ein Feld für seinen n-ten Schuß wählen. Daher definieren wir eine Strategie als eine Folge

$$\mathbf{Q} = [Q_{i(1)}, Q_{i(2)}, \ldots]$$

von Feldern. $Q_{i(n)}$ ist dabei das Feld für den n-ten Schuß, falls dieser erforderlich ist. Der Spielablauf wird also durch folgendes Diagramm beschrieben:



Figur 3

Ist das Schiff in A_j, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß es unter $\mathbf{Q}$ bis zum n-ten Schuß noch nicht versenkt ist, durch

$$\begin{aligned} &P(\text{Nicht versenkt nach n Schüssen}|A_j) \\ &\quad = P(B_{i(1)} \text{ und } \ldots \text{ und} B_{i(n)}|A_j) \\ &\quad = (1-p)^{s(n,j)} \end{aligned}$$

gegeben. Es folgt

P(Nicht versenkt nach n Schüssen)

$$= \sum_{j=1}^{m} P(\text{nicht versenkt nach n Schüssen}|A_j) \cdot P(A_j)$$

$$= \frac{1}{m} \sum (1-p)^{s(n,j)}.$$

Wir nennen **Q** *optimal für den n-ten Schuß* oder kurz n-*optimal*, falls die Wahrscheinlichkeit das Schiff mit n Schüssen nicht zu versenken, minimal ist. Wir erhalten, daß **Q** n-optimal ist, wenn die Zahlen s(n,j) 'so gleich wie möglich sind', d.h. wenn gilt

$$|s(n,i) - s(n,j)| \leq 1, (i,j = 1, ..., m).$$

Die Strategie **Q** heißt *optimal*, wenn Q n-optimal für alle n ist. Aus der letzten Formel erhält man eine konstruktive Regel zur Erzeugung aller optimalen Strategien: Ist **Q** eine Strategie, welche i-optimal für $i = 1, ..., n-1$ ist, so ist Q n-optimal genau dann, wenn

$$s(n,j) - s(n,r) \leq 0, j = 1, ..., m$$

gilt. Man kann also Feld $Q_n = A_r$ wählen. Ein Beispiel für eine optimale Strategie ist

$$[Q_1, ..., Q_m, Q_1, ..., Q_m, ...].$$

Ist L die Lebensdauer des Schiffes, so ist $L = n$ das Ereignis, daß unser Schiff mit dem n-ten Schuß versenkt wird. Wir berechnen den Erwartungswert von L. Sei B_{n-1} das Ereignis, daß das Schiff nicht von dem n-ten Schuß versenkt wird. Es folgt

$$P(L = n|A_j \text{ und } B_{n-1}) = \delta(j, j(n)) \cdot p.$$

Hierbei ist wieder A_j das Feld, auf dem sich das Schiff befindet und j(n) die Nummer des Feldes des n-ten Schusses. (Ferner ist δ das Kronecker-Symbol.) Mit

$$P(B_{n-1}|A_j) = (1-p)^{s(n-1,j)}$$

erhalten wir

$$P(A_j \text{ und } B_{n-1}) = P(B_{n-1}|A_j) \cdot P(A_j) = (1-p)^{s(n-1,j)} \cdot \frac{1}{m}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} P(L = n) &= \sum_{j=1}^{m} P(L = n|A_j \text{ und } B_{n-1}) \cdot P(A_j \text{ und } B_{n-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \delta(j, j(n)) \cdot p(1-p)^{s(n-1,j)} \cdot \frac{1}{m} \\ &= \frac{p}{m}(1-p)^{s(n-1,j(n))} \end{aligned}$$

und

$$P(L = \infty) = 1 - \frac{p}{m}.$$

Daraus ergibt sich

$$E(L) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(L = n) = \frac{p}{m} \sum n(1-p)^{s(n-1,j(n))}.$$

Man erhält hieraus direkt — und nicht überraschend — daß für optimale Strategien E(L) minimal wird.

Ferner ist noch folgende Bemerkung interessant: Für eine optimale Strategie konvergiert die Folge der a–posteriori–Wahrscheinlichkeit *nicht.* Hat man nämlich (bei einem Ozean mit m Feldern) $(a \cdot m - 1)$mal geschossen ($a = 1, 2...$), so ist die P_{n-1} für das eine Feld groß, welches einen Schuß weniger erhalten hat. Der $a \cdot m$-te Schuß auf dieses Feld hat jedoch für P_n die Gleichverteilung zur Folge: Alle Information ist verloren. Schießt man zum Beispiel jedoch auf das Feld A_1 nicht und auf die übrigen mit gleicher Häufigkeit, so konvergiert offenbar die Folge der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten fast sicher gegen die Wahrscheinlichkeit $P(A_1) = 1$ und $P(A_i) = 0$ für $i \neq 1$.

Literatur:

Hering, F. A new version of playing battleships,
Int. J. Educ. Sci. Technol., 1987, *<u>18</u>, No.3, (417-432)*