Methodische Anmerkungen zur Behandlung der Mittelwerte im Unterricht

von **Hans G. Schönwald**, Siegen

Den Aufsatz "Eine einfache axiomatische Begründung des arithmetischen Mittelwertes" von W. Krämer in Heft 2/1992 zu lesen, bereitet wohl jedem Lehrer Spaß. Denn mit dem elementaren Begriff des arithmetischen Mittels wird vielfältig gedanklich jongliert, und so werden höhermathematische Denkarten an niedermathematischem Stoff vorgeführt. Allerdings erscheint mir die Frage, "welche Eigenschaften ein vernünftiger Mittelwert eigentlich besitzen sollte", für die meisten Schüler zu schwer. Denn hier sind die Schüler gefordert, relativ abstrakt zu denken, auch wenn lediglich zwei Werte gemittelt werden sollen.

Die Abstraktion besteht dabei weder in dem Gegenstand der Zahlenpaare oder -tupel, noch sind die aufgelisteten Eigenschaften unanschaulich. Vielmehr besteht die Schwierigkeit darin, nach solchen Eigenschaften zu **fragen**. Jeder Schüler (der Sekundarstufe) weiß das arithmetische Mittel von wenigen Zahlen zu bilden; man rechnet ja Notendurchschnitte für sich selbst auf diese Weise aus! Und diese Vorstellung fällt jedem sofort ein, und zwar als **selbstverständlich** den Mittelwert darstellend. Auch die aufgelisteten Eigenschaften des arithmetischen Mittels sind trivial, so daß sie den Schülern zwar leicht verständlich nachvollziehbar, aber nicht bemerkenswert erscheinen. Hier zielt die übliche Schülerfrage: "Wie kommt man darauf?" auf die Fragestellung. Die Antwort erhält ihren Sinn ja auch nicht aus dem Gegenstand des arithmetischen Mittelwertes heraus, solange man ihn nur an und für sich betrachtet, sondern erst, wenn man ihn neben den anderen Mittelwerten und mit dem damit Erreichbaren und Reflektierbaren, also in einem größeren mathematischen Rahmen sieht.

Deshalb sollte man diese schöne Axiomatisierung des arithmetischen Mittelwertes vielleicht methodisch anders einführen, damit auch den Schülern deutlicher wird, daß es hier nicht um das arithmetische Mittel im Rahmen seiner alltagspraktischen Anwendungen geht, sondern um einen speziellen Mittelwert-Begriff im Rahmen der höheren Mathematik.

Man könnte die Mittelwertbegriffe vorgeben, so daß die Schüler deren Eigenschaften durch Vergleich an den konkret gegebenen Begriffen finden können, Dazu könnte man die verschiedenen Mittelwerte zu ihrer Einführung durch ihre typischen Anwendungen beschreiben; diese lassen sich mit "kantigen" Zahlenbeispielen (etwa 7 und 11) und anhand geometrischer Zeichnungen verständlich vorstellen. Diese Darstellungen sind

Stochastik in der Schule 12 (1992), Nr. 3, S. 55-56

dann nicht völlig konkret, sondern schon halb abstrakt. Das wäre vielleicht folgendermaßen möglich:

▪ Das harmonische Mittel $\frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)}$ definiert man als die Durchschnittsgeschwindigkeit über eine Strecke von 2km, wenn man den ersten km mit der Geschwindigkeit a und den zweiten mit b durchfahren hatte. Bei dem durch diese Formel gegebenen Begriff kann man die Schüler nach dessen Eigenschaften "als Mittelwert" fragen. Aufgrund dieser Deutbarkeit als Geschwindigkeitsmittel trägt er in ihren Augen die Bezeichnung "Mittel" zu recht, und so kann man sie fragen, welche Eigenschaften denn dieses Mittel besitze; das bedeutet für sie dann **ohne weiteres** den Vergleich mit dem arithmetischen Mittel, das für sie bisher das Mittel war, das selbstverständlich einzige; und diese Selbstverständlichkeit wird auch erst langsam abgebaut.

▪ Der Median - bei zwei Werten nicht ganz sinnvoll - wird als mittlerer Wert einer nach der Größe geordneten Zahlenreihe definiert. Dieser Begriff erschüttert die angesprochene Selbstverständlichkeit dadurch, daß nun "gar nicht mehr richtig" mit den Zahlen gerechnet wird; man verwendet ihn notgedrungen insbesondere dann, wenn ein Rechnen garnicht sinnvoll wäre. Gleichwohl entspricht er überzeugend der intuitiven Vorstellung von "der" Mittelwerteigenschaft. Somit wird die Vorstellung von einem Mittelwert durch dieses Nachdenken noch mehr geweitet. Mit dieser Verringerung der Selbstverständlichkeit erscheint die Aufgabe, die Eigenschaften zu formulieren, noch sinnvoller.

▪ Das geometrische Mittel ist für Schüler so schwierig zu verstehen wie der umgekehrte Dreisatz. Nach meiner Erfahrung verlockt die Schüler das folgende Beispiel, sich diesem Begriff innerlich ein wenig zu öffnen: Wenn man eine "1" und eine "4" geschrieben hat, steht man gemäß der geometrischen Mittelbildung auf "glatt 2". Die rational einleuchtende arithmetische Entsprechung

$$\text{Summe mal } {}^{1}/_{n} \;\text{->}\; \text{Produkt hoch } {}^{1}/_{n}$$

kann damit auch emotional zugänglicher werden. Und der verbleibende Verfremdungseffekt fördert wiederum das Nachdenken über die Eigenschaften. Naheliegender erscheint den Schülern unter der Bezeichnung "geometrisches Mittel" der Mittelpunkt einer Strecke; darauf kommen manche Schüler, die bei der Erklärung geschlafen haben und beim Wiederholen-sollen versuchen, sich aus den Begriffsfragmenten "geometrisch" und "Mittel" einen Reim zu machen.

Abschließend kann man im Unterricht explizit darauf hinweisen, daß Mathematiker oftmals in dieser Weise oder auch umgekehrt vorgehen, nämlich so tun, als ob es zu irgendeinem Begriff auch noch vergleichbare andere gebe, oder Eigenschaften, mit denen man diese einzelnen Begriffe unterscheiden und vielleicht auch anwenden kann oder für die man zeigen kann, daß es keine anderen vergleichbaren gibt und man deshalb garnicht danach zu suchen braucht.