"Ich glaube schon, daß das wohl richtig ist; aber verstehen tue ich es nicht."

Hans G. Schönwald, Siegen

Zusammenfassung: Am Beispiel einer erlebten Unterrichtseinheit zur Berechnung von einfachen (klassischen) Wahrscheinlichkeiten wird erkennbar, wie schwierig es ist, sich mit Primärintuitionen über Wahrscheinlichkeit auseinanderzusetzen.

Der unterrichtliche Kontext

In einer Klasse 6 berechneten wir einfache Wahrscheinlichkeiten. Wir warfen Münzen, Hexaeder oder Reißbrettstiftchen, jeweils einen einzelnen dieser Gegenstände oder auch zwei oder drei. Dabei benutzten wir die intuitive Vorstellung von Gleichwahrscheinlichkeit; bei zwei Würfeln z. B. stellten wir uns einen grün und einen rot vor. Die Pfadregeln hatten wir noch nicht behandelt, da sie eingehender Vorübungen bedürfen; die im folgenden beschriebenen Schwierigkeiten deuten dies mit an.

Ich habe nämlich immer wieder beobachtet, daß sich nicht wenige Schüler schwer tun, z. B. $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{7}$ durch $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ zu berechnen. Wem dieses aber schon in der "reinen" Arithmetik Mühe bereitet, der wird es wohl kaum in der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden verstehen. Man wird also im unterrichtlichen Vorgehen nicht darauf aufbauen können. Wenn es aber von der Sache her erforderlich wird, dies zu tun, wird man es zuvor ausführlich wiederholen müssen; oder man wird sogar diesen Zusammenhang erst wieder wie etwas Neues an einem konkreten Beispiel aufzeigen, (fast) ohne sich auf Vorwissen zu stützen, und dann hinterher diesen Zusammenhang als "auch sonst" geltend verselbständigen. Wie ausführlich diese Wiederholung entfaltet werden muß, wird man jeweils im Gespräch mit den leistungsschwächeren Schülern merken. - Viele Worte um etwas, das eigentlich nicht zu der hier behandelten Sache dazugehört; aber solch ungeradlinige Methodik kann der Schulalltag erfordern!

Im hier behandelten Unterricht sollte ein Anfang des stochastischen Denkens dadurch nahegebracht werden, daß die Schüler die Möglichkeiten und Grenzen des Mittels "Laplace-Experiment" kennenlernten.

Die behandelte Aufgabe

Wir behandelten die folgende Aufgabe aus unserem Schulbuch (Schwann, Mathematik 6. Schuljahr, Schwann, S. 188, Aufg. 12). Da die Einkleidung von den Schülern kaum verwendet wurde, sei die Aufgabe hier nur abstrahiert wiedergegeben:

Stochastik in der Schule 13 (1993), Nr. 1, S. 3 - 8

"Zwei Kinder spielen folgendes Spiel: Einer hält vier Streichhölzer in der Hand, von denen zwei gekürzt sind (was aber von außen nicht erkennbar ist); der andere darf zwei Hölzchen ziehen. Sind sie gleich lang, hat der eine gewonnen; sind sie verschieden lang, hat der andere gewonnen."

Die Vorgeschichte

Die Schüler hatten schnell eine Lösung gefunden:

$$P\,(\text{gleich lang}) = \frac{1}{2} = P\,(\text{verschieden lang})$$

Begründung: kurz & kurz, kurz & lang, lang & kurz, lang & lang sind die vier Möglichkeiten und diese sind gleichwahrscheinlich. Als selbstverständlich lag ihnen dabei zugrunde, daß man ein kurzes und ein langes Hölzchen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2}$ zieht.

Ich hielt meine Lösung dagegen: Aus den vier Dingen ${}_1,{}_2,1,2$ kann man zwei auf sechs Arten auswählen (jeweils als Kurzschreibweise für zweielementige Mengen zu verstehen):

${}_{12}$ $\;12$ $\;{}_1 1$ $\;{}_1 2$ $\;{}_2 1$ $\;{}_2 2$.

Da diese Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind, ergibt sich

$$P(\text{gleich lang}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(\text{verschieden lang}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \;.$$

Schülerreaktion: Nein, denn es kommt ja $\frac{1}{2}$ heraus. Also hatten sie meinen Lösungsgedankengang durchweg nicht verstanden; vielleicht ist das Denken in Teilmengen zu abstrakt.

Nun suchte ich eine elementarere Lösung und wechselte auch die Bezeichnungsweise; aus k_1, k_2, l_1, l_2 werden nun Paare gebildet ("erst (das eine) dann (das andere)"):

$$\begin{array}{cccccc} k_1,k_2 & k_1,l_1 & k_1,l_2 & k_2,k_1 & k_2,l_1 & k_2,l_2 \\ l_1,k_1 & k_1,k_2 & l_1,l_2 & l_2,k_1 & l_2,k_2 & l_2,l_1 \end{array}$$

Da diese Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind, ergibt sich

$$P(\text{gleich lang}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad P(\text{verschieden lang}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \;;$$

Schülerreaktion: Ja, aber es kommt auch $\frac{1}{2}$ heraus. Also waren sie (die Mehrheit? der gedanklich vorpreschende Teil der Schüler?) dieser Überlegung zustimmend gefolgt; gleichwohl erschien ihnen ihre Lösung ebenso richtig. Eine

Wiederholung erbrachte keine Änderung (weshalb auch? - denke ich im Nachhinein).

Um den Schülern ihre Lösung mit $P = \frac{1}{2}$ madig zu machen, erinnerte ich an das Werfen mit 2 Würfeln, wo

$$P(\text{zwei 3en}) = \frac{1}{36} \text{ und } P(\text{eine 1, eine 2}) = \frac{1}{18}$$

war, und ich erzählte die Geschichte vom Herrn de Méré. An das eine erinnerten sie sich, aber sie sahen nicht die Entsprechung zu der vorliegenden Aufgabe; das andere erschien ihnen lustig, aber im wahrscheinlichkeitstheoretischen Kern unverständlich. (Beides verstehe ich im Nachhinein.)

Schließlich stellte ich als eine Hausaufgabe (unter anderen), jeder solle sich zu Hause einen Spielpartner suchen und mit ihm dieses Spiel 30 mal durchführen; dann müsse nämlich im Mittel 10 mal "gleich lang" vorkommen. Die Schüler hatten Bedenken, einen Mitspieler zu finden (das Wetter ließ einen schönen Nachmittag erwarten). Wir einigten uns auf 20 Einzelspiele; bei 24 Schülern, also 480 Spielen würde es ja wohl im Mittel noch deutlich genug nahe bei $\frac{1}{3}$ (von 480 gleich 160) liegen.

In der darauffolgenden Stunde legten wir eine Tabelle mit den beiden Spalten "gleich lang" und "verschieden lang" an und notierten alle 24 Zahlenpaare an der Tafel. Am häufigsten traten die Paare [7;13], [8;12] und [5;15] auf. Insgesamt war 176 mal "gleich lang" vorgekommen (bei 480 Spielen). Das ergab eine relative Häufigkeit von 0,36 ... .Alle akzeptierten, daß dies nahe bei $\frac{1}{3}$ und nicht nahe bei $\frac{1}{2}$ liegt.

Da meldete sich Daniela: "Ich glaube schon, daß das wohl richtig ist; aber verstehen tue ich es nicht." - Breite Zustimmung.

Die Nachgeschichte

Was tun? - Der "Glaube" bezog sich auf die Empirie, das "Verstehen" auf die Theorie.

Vielleicht würde eine Entfremdung helfen: "Stellt Euch vier Zettelchen vor, mit den Nummern 1 bis 4"; ich malte sie an. Zuerst ziehen wir die 1 oder die 2 oder die 3 oder die 4. Wenn wir zuerst die 1 gezogen hatten, können wir danach ...; schließlich standen 12 Möglichkeiten an der Tafel. "Welche wird am wahrscheinlichsten auftreten?" - "Alle gleichwahrscheinlich." (Auf diese Frage hin machen sich die Schüler durch aktives gedankliches Suchen eine wahrscheinlichkeitstheoretische Symmetrie, also Gleichwahrscheinlichkeit recht deutlich.) Mit Nachzählen kamen wir nun leicht auf die Wahrscheinlichkeiten von $\frac{1}{3}$ für "gleiche Parität" und von $\frac{2}{3}$ für "verschiedene Parität".

Mit

gerade $\hat{=}$ kurz, ungerade $\hat{=}$ lang

entspricht dies dann unserer Aufgabe. - Schülerreaktion: Ja, das hatten wir gestern auch schon. Die Entsprechung war ihnen also offensichtlich.

Also, ich mußte dem Schülergedankengang Schritt für Schritt nachgehen und den ersten falschen Schritt aufzeigen! Die Schwierigkeit lag darin, daß dieser in der Schülerargumentation verdeckt war; er war Teil einer Schülerselbstverständlichkeit. Deshalb hatten wir solange aneinander vorbei geredet. Ich interpretierte das Ziehen von 2 Hölzchen als Nacheinanderziehen von je 1 Hölzchen und betonte nun das Nacheinander der beiden Einzelziehungen:

erste Ziehung		zweite Ziehung	
k	$P = \frac{1}{2}$ Rest: k l l	k	$P = \frac{1}{3}$
		oder	
		l	$P = \frac{2}{3}$
oder			
l	$P = \frac{1}{2}$ Rest: k k l	k	$P = \frac{2}{3}$
		oder	
		l	$P = \frac{1}{3}$
gleichwahrscheinlich		nicht gleichwahrscheinlich	

Also: "In der Hälfte der Fälle zuerst k, und dann bei $\frac{1}{3}$ davon noch mal k. Wieviel ist $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$?" - Schweigen - Ich male einen Kreis an, teile eine Hälfte in Drittel...

Langsam kommen einzelne Schüler auf $\frac{1}{6}$. Wir erhalten nacheinander die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, und daraus

$$P(\text{gleich lang}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\,, \quad P(\text{verschieden lang}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

Ein Schüler bittet auf meine Frage hin um eine weitere Wiederholung. Aber dann war es geschafft; wir konnten zur nächsten Aufgabe übergehen.

Vielleicht hätte ich hier deutlicher ausführen sollen, daß diese vier möglichen Abläufe unserer Ziehung nicht "gleichberechtigt" sind. Zum Vergleich hätte man sich ja vorstellen können, daß zwei gleich gute Sportler an Marathonläufen teilnehmen sollen; und zwar findet ein Lauf an dem einen und der andere am nächsten Tag statt. An beiden Tagen wird gelost, wer von beiden teilnimmt. Während man am ersten Tag erwarten kann, daß beide etwa gleich schnell laufen würden, wäre am anderen Tag derselbe Läufer, falls er noch mal laufen sollte, wohl viel langsamer, weil er noch müde wäre vom Tag vorher.

"Aber", fragte Claus einen Augenblick später, "wenn wir so lange Zeit für diese Aufgabe brauchen, wie sollen wir dann andere Aufgaben rechnen?" Ich verglich mit dem Sprachunterricht. Wenn man ein neues schwieriges Wort hört oder liest, buchstabiert man es zuerst; und wenn einem danach dieses Wort selbst oder in flektierter Form begegnet, ist es einem schon bekannter. Das Kennenlernen eines Wortes vergleichen wir hier mit dem Kennenlernen eines Verfahrens. Wenn man eine mathematische Aufgabe schon verstanden hat, wird man danach auch eine verwandte Aufgabe schneller berechnen können.

Ein Beispiel für Denktherapie

Vielleicht hätte ich mehr betonen sollen, daß sich das behandelte Problem nicht "einfach" lösen läßt, d. h. nicht durch einen (=1) Gedanken veranschaulichbar und somit auch kaum in dieser einfachen Weise intuitiv erfaßbar ist.

Die Schüler stellen sich wohl vor: man nimmt 2 von 4 Stücken, jedes (für sich allein vorgestellt) mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ greifbar; und da sie keine Unsymmetrien erkennen können, assoziieren sie die Vorstellung vom Werfen mit zwei Münzen (Sie machen also im Grunde den de Méresche Fehler; dies wird mir im Nachhinein klar.).

Diese Vorstellungsweise läßt das Nebeneinander der beiden Einzelbegriffe unkritisch bestehen. Wenn wir uns jede Vorstellung als Überbleibsel von Erleben und Denken "vorstellen", dann ist hier das Zweifachziehen der Hölzchen mit der symmetrischen Nebeneinander-Vorstellung, die von Erlebnissen wie "Zwillinge", "Schmetterlinge" oder Gedanken wie "Quadratzahl" herrührt und durch viele andere Beispiele gefestigt wurde, akkommodiert worden (im Piagetschen Sinn). Vielleicht aber sind auch bei ihrer gedanklichen Vorstellung die Objekte (also hier die Hölzchen bzw. Münzen) deutlicher vor Augen als die Prozesse mit ihnen (also hier Ziehen bzw. Werfen). Abhängigkeiten bzw. Unabhängigkeiten sind eben Relationen zwischen Experimentstufen.

Solches Un- oder Mißverständnis beim Erfassen von Wirklichkeit gilt es zu berichtigen. Es liegt psychologisch sehr tief und bedarf daher einer eingehenden Analyse und Therapie. Sonst wird es angelernt und letztlich doch unverstanden bleiben. Dies kann die Fehlerfreudigkeit mancher Schüler in solchen Dingen erklären helfen.

Literatur

Mathematik, 6. Schuljahr. Schwann, 1988.

OStR Dr. Hans G. Schönwald, Ostlandstr. 19, 5900 Siegen-Eisern

Zur Information: Die Erdbeben-Skalen

Die Intensität von Erdbeben wurden früher nach dem Grad der Zerstörungen beschrieben. Diese Mercalli-Sieberg-Skala charakterisiert z.B. Stärke 4 als "von vielen Personen wahrgenommen", Stärke 10 als "Einstürze von vielen Bauten" und endet bei 12. Die Werte der Richter-Skala sind dagegen ein objektives Maß für die im Epizentrum freigesetzte Energie. Sie ist nach oben offen und logarithmisch, d.h. ein Erdstoß der Stärke 8 ist zehnmal größer als Stärke 7, 100mal größer als Stärke 6, 1000mal größer als Stärke 5 usw. Das stärkste Erdbeben dieses Jahrhunderts erreichte auf der Richter-Skala 8,6 (China 1920, 180 000 Tote.

(Berliner Zeitung vom 15.5.1991)