Zum Problem der Mehrdeutigkeit von Kombinatorik-Aufgaben

von Gabriele GETROST, Darmstadt

Die Kombinatorik in Stochastikkursen bereitet vielen Schülern und (daher auch) manchen Lehrern nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten haben zu dem Vorschlag geführt, die Kombinatorik so knapp wie möglich zu behandeln. Daß dies durchaus erfolgreich möglich ist, zeigt zum Beispiel H. ALTHOFF: Wieviel Kombinatorik benötigt man in einem Grundkurs Stochastik? (Der Mathematikunterricht 30(1984), Heft 1, S. 94 - 99). Im gleichen MU-Heft (Thema: Kombinatorik in der Wahrscheinlichkeitsrechnung) allerdings plädiert H. SCHEID, die Kombinatorik als ein wichtiges mathematisches Gebiet nicht zu reduzieren bzw. zu vernachlässigen, da es für deren Behandlung auch im Grundkurs viele gute Gründe gibt. Diesem Urteil möchte ich mich anschließen, d.h. ich behandle die Kombinatorik in meinem Unterricht nicht als Hilfswissenschaft für die Stochastik, sondern als ein Gebiet mit eigenständigen Zielsetzungen. Anspruchsvollere kombinatorische Fragestellungen bedürfen allerdings einer sehr sorgfältigen Unterrichtsplanung.

Mißerfolgserlebnisse bei kombinatorischen Zählproblemen zu Beginn eines Kurses können ausstrahlen auf die spätere Wahrscheinlichkeitsrechnung, d.h. Anfangsschwierigkeiten bei der "Kunst des Zählens" bzw. der "Lehre vom geschickten Zählen" können Schüler entmutigen, sich in der anschließenden Stochastik etwas zuzutrauen. "In der Kombinatorik kommt es besonders auf das methodische Geschick des Lehrers an: er muß in einer sehr sorgfältigen Unterrichtsführung den Schülern viel Zeit lassen zum Nachdenken, zum Ausdiskutieren ihrer eigenen - nicht immer falschen, aber oft umständlichen - Lösungsvorschläge. Ein Lehrer mit wenig Gespür für die in der Kombinatorik sehr langsamen Lernprozesse gerät leicht in Gefahr, durch vorschnelle Verbalisierung

Stochastik in der Schule 13(1993), Heft 3, S. 3 - 9

der eigenen, 'eleganten' Lösung die zeitraubende Gewinnung von Einsichten bei den Schülern abzuwürgen. (Er gleicht jenem jungen Mann aus einem chinesischen Gleichnis, der dem Getreide beim Wachsen helfen wollte, indem er an den Halmen zog.) Nicht selten enden Stochastik-Kurse bei der Kombinatorik, weil die Schüler 'es einfach nicht begreifen wollen', und aus zehn eingeplanten Stunden Kombinatorik wird schnell der dreifache Zeitaufwand, wobei ein verzweifelter Lehrer mit immer neuen Anläufen versucht, etwas anzutrainieren, was sich auf keiner Stufe so mechanisch handhaben läßt wie Kurvendiskussionen oder das Lösen von Gleichungssystemen."(H. SCHNEIDER, G. STEIN: Didaktische Probleme von Stochastik-Grundkursen in der Sekundarstufe II - am Beispiel der hessischen Kursstrukturpläne Mathematik .- mathematica didactica 3(1980), Heft 4, S. 185 - 205).

Die Auswirkungen der kombinatorischen Unerfahrenheit mancher Lehrer wird noch verstärkt durch mißverständliche oder mehrdeutige Aufgabenstellungen der Schulbücher. Dabei ist es nicht entscheidend, ob die Aufgabenformulierung für Lehrer (,denen die Lösung bekannt ist,) eindeutig zu verstehen ist, sondern ob Schüler sie so verstehen, wie sie gemeint sein soll. In diesem Zusammenhang ist es besonders wichtig, zusammen mit den Schülern Art und Ursachen möglicher Denkfehler herauszuarbeiten und Mißverständnisse zu korrigieren. Die folgende Aufgabe führte im Unterricht zu mindestens drei verschiedenen Lösungen und den entsprechenden lebhaften Diskussionen:

> "Besonders in Süddeutschland ist das Schafkopfspiel verbreitet. Man spielt mit 32 Karten, darunter genau 4 Assen. Jedem der 4 Spieler werden 8 Karten ausgeteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jeder der 4 Spieler 1 As erhält, wenn man davon ausgeht, daß die Karten vor dem Austeilen gut gemischt wurden?" (W.-D. BURKHARDT: Stochastik-Grundkurs .- Diesterweg 7127, Frankfurt 1985, S. 76 - 77)

Bei Textaufgaben werden Schüler darauf trainiert, alle überflüssigen Informationen wegzulassen, um zum mathematischen Kern der Aufgabe vorzustoßen. Das o.g. Problem kann derart mißverstanden werden, daß es einzig auf die Verteilung der 4 Asse ankommt. Dies führt auf die beiden folgenden Lösungen.

1. Lösung:

An vier (namenlose) Spieler sollen vier Asse verteilt werden. Ausländische Schüler, die aus einem Kulturkreis kommen, in dem Karten- und Würfelspiele als Werkzeuge des Teufels gelten, sind Spielkarten vielleicht so unvertraut, daß die Asse als ununterscheidbare Kugeln angesehen werden können, die auf vier Urnen (Spieler) so verteilt werden sollen, daß in jeder Urne eine Kugel liegt. Bei den folgenden Verteilungsbeispielen sind die vier Urnen durch drei Striche (|) voneinander getrennt und die Kugeln mit 0 gekennzeichnet:

00|0||0 |00||00   0||000| 0|0|0|0 |||0000 |0000||

Also gibt es soviel Möglichkeiten, vier Asse auf vier Spieler zu verteilen, wie (0,1) - Worte mit 4 Nullen und 3 Einsen gibt, also

$$\binom{7}{4}$$

Möglichkeiten. Nur bei einer dieser Verteilungen ist in jeder Urne eine Kugel, d.h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

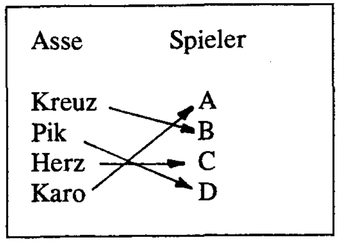
$$\frac{1}{\binom{7}{4}} = \frac{1}{35} \approx 2.86\ \%$$

2. Lösung:

Sind die Asse wohl unterschiedene Karten, so kann deren Verteilung auf die Spieler als Abbildung aufgefaßt werden, d.h. bei dieser Lösungsstrategie werden die Spieler A, B, C und D unterschieden, und die vier Asse sind Kreuz, Pik, Herz und Karo.

Es gibt 4^4 Abbildungen von der Menge der Asse in die Menge der Spieler.

Die Anzahl der Bijektionen ist 4!



Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32} = 9.375\ \%$$

3. Lösung:

Die Fragestellung der Aufgabe möchte der Autor so verstanden wissen: Wieviele Möglichkeiten gibt es, 32 Karten an 4 Spieler zu verteilen? Bei wievielen dieser Möglichkeiten erhält jeder Spieler ein As?

Die Verteilung der 32 Spielkarten kann auf

$$\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8} = \frac{32!}{(8!)^4}$$

Arten erfolgen, d.h. man stellt sich die Verteilung als 4-Stufenprozeß vor, bei dem für den ersten Spieler 8 Karten aus 32 ausgewählt werden, für den zweiten Spieler 8 aus 24 usw.

Da das konkrete Kartenausteilen meist nicht so erfolgt, daß jeder Spieler 8 Karten auf einmal gegeben werden, sondern z.B. reihum jeweils eine Karte

$$\binom{32}{1}\binom{31}{1}\binom{30}{1}\binom{29}{1}\binom{28}{1}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 32!$$

oder zweimal vier Karten

$$\binom{32}{4}\binom{28}{4}\cdot\cdot\cdot\cdot\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \frac{32!}{(4!)^8}$$

muß Schülern, die auf dieser Art der Kartenverteilung bestehen, die Einsicht vermittelt werden, warum pro Spieler im ersten Fall mit 8! und im zweiten Fall mit

$$\binom{8}{4}$$

dividiert werden muß, um Doppelzählungen zu vermeiden. Die Schwierigkeit in der Kombinatorik liegt nicht so sehr darin, Schüler von der Richtigkeit einer Lösung zu überzeugen, sondern darin, ihnen einsichtig zu machen, warum ihre Lösungsvariante falsch bzw. unvollständig ist.

Der Autor der Aufgabe gibt folgende Lösung an:

> "Die 32 Karten können auf 32! Weisen angeordnet werden. Nehmen wir an, Spieler A erhalte die ersten 8 Karten einer Anordnung, Spieler B die nächsten 8, die Spieler C und D die dritten und vierten 8 Karten. Da von diesen 32! Anordnungen jeweils die 8! möglichen Anordnungen der 8 Karten des Spielers A als gleich anzusehen sind (es ist nämlich belanglos, in welcher Reihenfolge er die 8 Karten erhält), unterscheiden wir zunächst nur $\frac{32!}{8!}$ mögliche Fälle. Entsprechend sind unter diesen Fällen auch jeweils die 8! möglichen Anordnungen der Karten von Spieler B, C und D als gleich anzusehen. Es gibt somit "nur"
>
> $$\frac{32!}{8!^4}\ (\approx 10^{17})$$
>
> Möglichkeiten, die 32 Karten auf die 4 Spieler zu verteilen."

Für die Anzahl der Verteilungen, bei der jeder Spieler ein As erhält, ergibt sich entsprechend

$$\binom{28}{7}\binom{4}{1}\cdot\binom{21}{7}\binom{3}{1}\cdot\binom{14}{7}\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{7}\binom{1}{1}$$

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{28}{7}\binom{4}{1}\cdot\binom{21}{7}\binom{3}{1}\cdot\binom{14}{7}\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{7}\binom{1}{1}}{\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}\cdot\binom{8}{8}}$$

$$= \frac{\frac{28!\,4!}{7!^4}}{\frac{32!}{8!^4}} = \frac{8^4}{\binom{32}{4}} = 11.4\ \%$$

Der durch Kürzen entstandene Bruch $\frac{8^4}{\binom{32}{4}}$ war im Unterricht Anlaß, über einen weiteren Lösungsweg nachzudenken:

Die 32 Karten werden zufällig auf Plätze verteilt, die mit 1 bis 32 durchnummeriert sind:

PlatzNr. |1|2|3|...|8| |9|10|...|15|16| |17|...|24| |25|...|32|

Der erste Spieler erhält nach der Verteilung die Karten von Platz Nr. 1 bis 8, der zweite Spieler die von Nr. 9 bis 16 usw.

Für die Verteilung der vier Asse gibt es $\binom{32}{4}$ mögliche Plätze. Die günstigen Fälle ergeben sich dadurch, daß aus den 8 Plätzen eines jeden Spielers ein Platz für ein As ausgewählt wird. Dies geht auf $\binom{8}{1}$ Arten bei jedem Spieler; also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}}{\binom{32}{4}}$$

Da bei diesem Lösungsweg die Verteilung der restlichen 28 Karten scheinbar keine Rolle spielt, fühlten sich jene Schüler, die

$$\frac{1}{\binom{7}{4}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{4!}{4^4}$$

berechnet hatten, ermutigt, ihre Lösungen erneut zu verteidigen.

Zur didaktischen Dialektik solcher Kommunikation im Unterricht sowie zur Problematik von Lösungspluralität und Modellvielfalt in der Kombinatorik vgl. R. PERKO: Bemerkungen zur marginalen Rolle der elementaren Kombinatorik in der Realität des AHS-Unterrichts .- in: DÖRFLER; FISCHER: Stochastik im Schulunterricht .- Stuttgart : Teubner 1991, S. 141 - 154.

StR' i.H. Gabriele GETROST
TH Darmstadt, Fachbereich Mathematik, Arbeitsgruppe Fachdidaktik
Schloßgartenstraße 7, 64289 Darmstadt