

## Simulationen - angeregt durch eine Fragestellung aus der Bruchrechnung

von HANS KILIAN, Dortmund

*Zusammenfassung:* Aus Überlegungen zu verschiedenen Verfahren zur Addition bzw. Subtraktion von Brüchen heraus wird danach gefragt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die jeweiligen primären Summenbrüche überhaupt oder sogar nur schwer zu kürzen sind. Diese Fragen werden durch entsprechende Simulationen beantwortet. Die Bedeutung der Ergebnisse für den Mathematikunterricht wird angesprochen.

### 1. Verfahren zur Addition von Brüchen

Gegeben seien zwei positive Brüche  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ . Deren Summe wird i.a. definiert

$$\text{durch } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

In der Praxis will man dann in der Regel den Summenbruch in der Form

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{Z}{N} \quad \text{mit } \text{ggT}(Z,N) = 1$$

schließlich vorliegen haben. Wir betrachten verschiedene Möglichkeiten zur Bestimmung des Paares (Z,N).

Für die Motive, die dazu geführt haben, solche Betrachtungen anzustellen, möchte ich an dieser Stelle auf Kilian (1992) verweisen.

*1. Beispiel:* „Direkte Addition“ gemäß der Definition der Summe von Brüchen

$$\frac{2}{205} + \frac{7}{123} = \frac{2 \cdot 123 + 7 \cdot 205}{205 \cdot 123} = \frac{246 + 1435}{25215} = \frac{1681}{25215} = \frac{1}{15}$$

Die sehr großen Zwischenwerte und ein schwierig zu kürzender primärer Summenbruch treten auf, obwohl die Ausgangsbrüche bereits vollständig gekürzt sind. Dieses Beispiel zeigt vor allem, daß man auch mit harmlosen Ausgangsbrüchen unter Umständen schnell den Integerbereich eines Computers überschreiten kann.

### 2. Beispiel: Addition nach dem Hauptnennerverfahren (kgV-Verfahren)

Wegen  $\text{ggT}(b, d) \cdot \text{kgV}(b, d) = b \cdot d$  gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot (d:\text{ggT}(b, d)) + c \cdot (b:\text{ggT}(b, d))}{\text{kgV}(b, d)}$$

und damit erhält man, mit  $\text{ggT}(b, d) = 41$ , in unserem Beispiel

$$\frac{2}{205} + \frac{7}{123} = \frac{2 \cdot (123:41) + 7 \cdot (205:41)}{615} = \frac{41}{615} = \frac{1}{15}$$

Das ist im wesentlichen das übliche Verfahren, und es hat den Vorteil, daß die auftretenden Zwischenwerte und der Rechenaufwand zum Kürzen des primären Summenbruchs erheblich kleiner geworden ist.

### 3. Beispiel: Ausklammern des ggT(b,d) und anschließende direkte Addition

$$\frac{2}{205} + \frac{7}{123} = \frac{1}{41} \cdot \left( \frac{2}{5} + \frac{7}{3} \right) = \frac{1}{41} \cdot \frac{2 \cdot 3 + 7 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{1}{41} \cdot \frac{41}{15} = \frac{1}{15}$$

Ideal im Sinne kleiner Zwischenwerte und damit auch von geringem Rechenaufwand beim Kürzen wäre ja ein Verfahren, welches die folgende Bedingung erfüllen würde: Alle Zwischenwerte, die während der Berechnung auftreten, sind

$$\leq \max. (a, b, c, d, Z, N).$$

In dem obigen Beispiel 3 ist diese Bedingung erfüllt, aber es gibt ja auch noch andere Brüche:

### 4. Beispiel: Addition durch ggT-Verfahren

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{14} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{5}{3} + \frac{3}{7} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 7 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{44}{21} = \frac{22}{21}$$

und hierbei ist der zu große Zwischenwert 44 trotz Ausklammerns des  $\text{ggT}(b, d)$  aufgetreten.

Bei dem Vergleich des Hauptnennerverfahrens mit dem ggT-Verfahren, auch unter dem Gesichtspunkt, welches von beiden Verfahren für Schüler besser geeignet sein könnte, habe ich einige Schulbuchadditionsaufgaben durchgerechnet und andererseits versucht, besonders typische Beispiele zu konstruieren. Dabei habe ich unter anderem den Eindruck gewonnen, daß die nach dem Hauptnennerverfahren (oder nach dem ggT-Verfahren) zunächst entstehenden Summenbrüche nur noch sehr selten zu kürzen waren. Vielmehr waren in den meisten Fällen Zähler und Nenner des primären Summenbruchs bereits teilerfremd. Außerdem war es schwierig, kürzbare Beispiele zu konstruieren. Man fragt sich schließlich: *Wie häufig sind eigentlich die primären Summenbrüche überhaupt kürzbar?*

Bei dem ggT-Verfahren ist der primäre Summenbruch, der nach dem Ausklammern des  $\text{ggT}(b, d)$  zunächst gebildet wird, sogar *stets* vollständig reduziert, und es ist nur noch der ausgeklammerte  $\text{ggT}(b, d)$  gegen den Zähler  $a \cdot (d:\text{ggT}(b, d)) + c \cdot (b:\text{ggT}(b, d))$  eventuell kürzbar. Die Begründung liegt in dem folgenden Satz, für dessen Beweis wir auf Kilian (1992) verweisen.

*Satz:* Die Brüche  $a/b$  und  $c/d$  seien vollständig gekürzt, und außerdem seien die Nenner  $b$  und  $d$  teilerfremd. Dann ist auch der Bruch

$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

vollständig gekürzt, d.h. der Zähler  $ad + bc$  und der Nenner  $bd$  sind teilerfremd.

*Folgerung:* Wenn die Brüche  $a/b$  und  $c/d$  vollständig gekürzt sind, so ist der (primäre) Summenbruch genau dann kürzbar, wenn die Nenner  $b$  und  $d$  nicht teilerfremd sind.

## 2. Fragen zur Kürzbarkeit von Summenbrüchen

Es sei  $N_m := \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Zwei Brüche  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ , d. h. zwei Paare  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  werden rein zufällig ausgewählt aus  $N_m \times N_m$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der entstehende Summenbruch kürzbar ist, und zwar

(1) nach direkter Addition der zufällig ausgewählten Brüche:

$$P_d(\text{ggT}(ad + bc, bd) > 1) = ?$$

(2) nach Kürzen der rein zufällig ausgewählten Brüche und anschließender direkter Addition (Ich bezeichne die gekürzten Brüche wieder mit  $a/b, c/d$ ):

$$P_{KH}(a \cdot (d : \text{ggT}(b,d)) + c \cdot (b : \text{ggT}(b,d)), \text{ggT}(kgV(b,d)) > 1) = ?$$

(3) Die Ausgangsbrüche werden gekürzt und dann nach dem Hauptnennerverfahren addiert:

$$P_{KH}(a \cdot (d : \text{ggT}(b,d)) + c \cdot (b : \text{ggT}(b,d)) > 1) = ?$$

(4) Wie (1), (2) oder (3), aber wir fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein solcher Summenbruch „schwer“ zu kürzen ist?

Welche Brüche sind schwer kürzbar? Für diesen Aufsatz habe ich das so festgelegt, daß Brüche schwer bzw. nicht leicht kürzbar sind, bei denen der ggT von Zähler und Nenner größer als 5 ist. Begründung: Alle anderen Brüche kann man durch (eventuell vielfaches) Kürzen durch 2, 3 und 5 reduzieren und dafür stehen einfache Teilbarkeitsregeln zur allgemeinen Verfügung.

Ich will zeigen, daß Brüche, die schwer kürzbar sind, nur einen geringen Anteil aller Brüche ausmachen. Dazu muß man nicht unbedingt genau definieren, was einen schwer kürzbaren Bruch charakterisiert. Es genügt auch zu zeigen, daß eine Klasse von Brüchen, die alle schwer kürzbaren Brüche und eventuell noch einige weitere Brüche umfaßt, nur einen geringen Anteil aller Brüche ausmacht. Jedenfalls kommen dann auch alle schwer kürzbaren Brüche nur selten vor, egal wie man „schwer“ vielleicht später noch präzisiert. - Die Begründung für dieses Vorgehen ist (abgesehen davon, daß eine Einigung darüber, welche Brüche für welchen Personenkreis schwer kürzbar sind, kaum möglich sein wird), daß man auf diese Weise ein Auswahlkriterium für Brüche bekommt, welches einfach in einem Computerprogramm zu realisieren ist.

**Ein Einschub:** Es gibt noch eine ganz brauchbare Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch 7. Diese ist allerdings kaum bekannt. Auch ihre Herkunft ist mir nicht bekannt. Da es schön wäre, wenn man die Schwelle für „schwer“ noch etwas höher legen könnte, möchte ich diese Gelegenheit nutzen, um diese Teilbarkeitsregel zu propagieren.

Zunächst ein Beispiel: Ist 7 ein Teiler von 123456?

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ - \quad \quad \quad 1 \ 2 \\ \hline 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \\ - \quad \quad \quad 6 \\ \hline 1 \ 2 \ 2 \ 7 \\ - \quad 1 \ 4 \\ \hline 1 \ 0 \ 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} (12 = 2 \cdot 6) \\ (6 = 2 \cdot 3) \\ (14 = 2 \cdot 7) \\ 7|108, \text{ also ist auch } 7|123456. \end{array}$$

Dieses Verfahren beruht auf dem folgenden *Teilbarkeitskriterium für die Teilbarkeit durch 7*:

Gegeben sei eine (nicht zu kleine) natürliche Zahl

$$z = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 \quad (a_i \in \{0,1,2, \dots, 9\}, a_n \neq 0)$$

Die letzte Ziffer  $a_0$  von  $z$  wird gestrichen, und von der so entstandenen Zahl wird  $2 \cdot a_0$  subtrahiert usw.!  $z$  ist *genau dann* durch 7 teilbar, wenn die letzte neue Zahl durch 7 teilbar ist.

Auch Schüler und Studenten finden heraus, daß bei diesem Verfahren  $z$  übergeht in

$$z \rightarrow \frac{z - a_0}{10} - 2 \cdot a_0 = \frac{z - 21 \cdot a_0}{10}$$

Von  $z$  wird also ein Vielfaches von 21 (und also von 7 sowohl als auch von 3) subtrahiert, und anschließend wird die Differenz durch  $10 = 2 \cdot 5$  dividiert. Die Ausgangszahl und die neue Zahl haben also dieselben Teilbarkeitseigenschaften in Bezug auf 7 (und auf 3). - Man kann weitere Teilbarkeitsregeln dieser Art konstruieren, wenn man andere Vielfache von  $a_0$  von  $z$  subtrahiert usw.

### 3. Eine verwandte Fragestellung

Daß die obigen Fragen zur Kürzbarkeit von Summenbrüchen nicht einfach zu beantworten sein werden, zeigt die bekannte Antwort auf die folgende, nun naheliegende, weil einfachste Frage in diesem Zusammenhang:

Ein Bruch  $\frac{a}{b}$  werde rein zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein solcher Bruch vollständig gekürzt ist:  $P(\text{ggT}(a,b) = 1) = ?$

Es gilt  $P(\text{ggT}(a,b) = 1) = \frac{6}{\pi^2} \approx 60.8\%$ , also  $P(\text{ggT}(a,b) > 1) \approx 39\%$ .

Eine Skizze eines Beweises findet man bei Knuth (S. 324, S. 337), eine heuristische Herleitung findet man bei Engel (S. 209-211).

Wo  $\pi$  erscheint, hört die Mathematik auf, ganz einfach zu sein. Deshalb kann man diese Überlegungen kaum in der Klasse 6 durchführen. Aber für unsere praktischen Fragestellungen reicht eine Antwort auf solche Fragen auf einige Prozentpunkte genau auch völlig aus, und die kann man durch Simulationen mit relativ wenig Aufwand erreichen. Läßt man die Schüler bzw. Studenten vor der Durchführung einer Simulation raten, wie das Ergebnis aussehen wird, so erreicht man im allgemeinen einen deutlicheren Lerneffekt. Die meisten Leute sind dann z.B. erstaunt darüber, wie groß  $P(\text{ggT}(a,b) = 1)$  ist.

#### 4. Ergebnisse der Simulationen

Um die oben formulierten Fragen zur Kürzbarkeit von Summenbrüchen durch Simulation zu beantworten, wurden Programme in Standard Turbo Pascal verwendet. Die Zahlen a, b, c, d wurden als Pseudozufallszahlen aus einem Abschnitt  $N_{\max} = \{1, 2, 3, \dots, \max.\}$  ausgewählt, die entsprechenden Brüche und Summenbrüche gemäß dem jeweiligen Additionsverfahren an den richtigen Stellen durch eine Prozedur KuerzeBruch gekürzt. Eine Funktion ggT bestimmte die interessierenden größten gemeinsamen Teiler. (Diese Programme stelle ich interessierten Kollegen und Kolleginnen gern zur Verfügung.)

*Bemerkung:* Es werden also Stichproben (vom Umfang  $n = 2000$  z.B.) aus den Grundgesamtheiten  $N_{\max}^2 \times N_{\max}^2$  gezogen, allerdings nicht durch ein wirklich rein zufälliges Auswahlverfahren, sondern durch ein algorithmisches Verfahren zur Bildung entsprechender Paare von Paaren ((a,b), (c,d)) aus Pseudozufallszahlen, a, b, c, d. Insofern handelt es sich um Simulationen, insbesondere um ein Monte-Carlo-Verfahren.

Dabei habe ich die folgenden Ergebnisse erhalten:

1. Additionsverfahren: direkte Addition der zufälligen Ausgangsbrüche mit  $1 \leq a,b,c,d \leq \max.$ , gemäß der math. Definition der Addition von Brüchen.

max.	ggT <sub>d</sub> > 1	ggT <sub>d</sub> > 5	ggT <sub>d</sub> > 7
50 (gezählte Werte)	0.7027		0.2836
99	0.71	0.36	0.31
9999	0.72	0.37	0.31

*Bemerkungen:*

- Die Ergebnisse zu max = 9 und max = 50 sind exakt. Alle möglichen Paare von Brüchen wurden durchgezählt. Anzahl der benutzten Paare sonst 2000.
- Es fällt auf, daß Summenbrüche viel häufiger kürzbar sind als rein zufällig gewählte Brüche. Aber die meisten Brüche sind leicht zu kürzen.
- Von den Ergebnissen zu max  $\geq 99$  ist vermutlich jeweils nur die erste Ziffer zuverlässig. Selbst die Einerstellen der entsprechenden Prozentangaben könnten sich noch ändern. Das gilt auch für alle folgenden Aussagen.

2. Additionsverfahren: Kürzen der Ausgangsbrüche, dann direkte Addition:

max	ggT <sub>kd</sub> > 1	ggT <sub>kd</sub> > 5	ggT <sub>kd</sub> > 7
50 (gezählte Werte)	0.2132		0.096
99	0.22	0.082	0.066
9999	0.22	0.087	0.073

*Bemerkung:*

Es fällt auf, wieviel schon das Kürzen der Ausgangsbrüche die Kürzbarkeit der Summenbrüche reduziert, obwohl diese noch durch direkte Addition gewonnen werden. Ich würde im Unterricht die SchülerInnen selbst herausfinden lassen, daß es aus Gründen der Rechenökonomie günstig ist, die Ausgangsbrüche zunächst zu kürzen. Entsprechende Aufgaben müßte man eventuell zu den Schulbuchaufgaben hinzufügen.

3. Additionsverfahren: Kürzen der Ausgangsbrüche, dann Hauptnenner- bzw. ggT-Verfahren

max	ggT <sub>kh</sub> > 1	ggT <sub>kh</sub> > 5	ggT <sub>kh</sub> > 7
50 (gezählte Werte)	0.0613		0.0029
99	0.06	0.005	0.003
9999	0.06		0.002

*Überraschendes Ergebnis:* Fast alle Summenbrüche sind leicht kürzbar. Nur ungefähr 0.6 % aller Summenbrüche sind schwer kürzbar. Für die allgemeine Praxis und ebenfalls für die Schulpraxis sind die Brüche, die nicht durch höchstens 5 kürzbar sind, vermutlich ohne Bedeutung! Meines Erachtens kann man daraus die Konsequenz ziehen, daß man in einer Klasse, deren Schüler sehr große Probleme im Umgang mit Brüchen haben, die auftretenden Summenbrüche (bei vollständig gekürzten Ausgangsbrüchen und Hauptnenner- bzw. Ausklammervverfahren) nur noch durch 2, 3 und 5 (und eventuell 7) kürzen sollte, bis diese Faktoren nicht mehr auftreten.

*Bemerkung:*

Bei der Addition nach dem ggT-Verfahren ist der Zähler des auftretenden Summenbruches gegen den ausgeklammerten größten gemeinsamen Teiler der Nenner genau dann zu kürzen, wenn der Summenbruch nach dem kgV-Verfahren zu kürzen ist. Dies ergibt sich aus den folgenden Rechnungen:

1) Es sei  $ggT(a, b) = ggT(c, d) = 1$ ,  $g := ggT(b, d)$ ,  $B := b:g$ ,  $D := d:g$

Dann gilt:  $ggT(ad + bc, bd) = g \cdot ggT(aD + Bc, g)$

*Beweis:*

$ggT(ad + bc, bd) = ggT(aDg + gBc, g^2BD) = g \cdot ggT(aD + Bc, gBD)$ .

Da nun nach dem obigen Satz  $ggT(aD + Bc, BD) = 1$  ist, so folgt weiter  
 $= g \cdot ggT(aD + Bc, g)$ .

2) Aus  $kgV(b, d) \cdot ggT(b, d) = b \cdot d$  erhält man  $kgV(b, d) = \frac{b \cdot d}{g} = gBD$ .

Damit folgt, für das kgV-Verfahren:

$ggT(a \cdot (d:g) + (b:g) \cdot c, kgV(b, d)) = ggT(aD + Bc, gBD) = ggT(aD + Bc, g)$ ,  
 wie oben.

Der primäre Summenbruch des kgV-Verfahrens  $\frac{a \cdot (d:g) + (b:g) \cdot c}{b \cdot d:g}$  ist also

genau dann und durch genau dieselbe Zahl kürzbar wie die „Größen“  $g$  und  $aD + Bc$  des ggT-Verfahrens. (Allerdings ist die Kürzungszahl  $ggT(aD + Bc, g)$  im kgV-Verfahren schwieriger direkt zu berechnen (s.o.)).

## 5. Simulation im Unterricht

Kann man diese Ergebnisse auch im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I gewinnen? Ich habe versuchsweise folgendes Experiment ohne Computereinsatz durchgeführt:

(I) Aus einer Tabelle von Zufallszahlen (Wetzel et al. 1967) habe ich 50 Paare von Brüchen  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  herausgelesen mit  $01 \leq a, b, c, d \leq 99$  und in einer zweiseitigen Liste zusammengestellt.

(II) Dann wurde zunächst gezählt, wie viele dieser Brüche schon vollständig gekürzt waren. Ergebnis (in diesem Experiment):

abs. Häufigkeit gekürzter Brüche =  $H(ggT(a, b) = 1) = 64$

rel. Häufigkeit gekürzter Brüche =  $h(ggT(a, b) = 1) = \frac{64}{100} \approx 0.6$

(III) Relative Häufigkeit  $h_d$  derjenigen Paare von Brüchen, deren Summenbrüche (berechnet direkt aus den Zufallsbrüchen) zu kürzen sind:

$$h_d(ggT(ad + bc, bd) > 1) = \frac{35}{50} = \frac{70}{100} \approx 0.7$$

(0.7 als Schätzwert für die entsprechende Wahrscheinlichkeit)

(IV) Die Zufallsbrüche werden ggf. zunächst gekürzt und dann direkt addiert:

$$h_{kd}(ggT(ad + bc, bd) > 1) = \frac{14}{50} = \frac{28}{100} \approx 0.3 \quad (\text{als Schätzwert})$$

(V) Die Zufallsbrüche werden zunächst gekürzt und dann nach dem Hauptnennerverfahren oder nach dem ggT-Verfahren addiert:

$$h_{kH}(ggT(ad + bc, bd) > 1) = \frac{2}{25} = \frac{8}{100} \approx 0.1 \quad (\text{als Schätzwert})$$

(VI) Wie oben (V), aber

$$h_{kH}(ggT(ad + bc, bd) > 5) = \frac{0}{50} \approx 0.0$$

(0.0 als Schätzwert, mit angedeuteter Genauigkeit)

Dieses Beispiel zeigt, daß man schon mit geringem Aufwand brauchbare Ergebnisse gewinnen kann. In einer Klasse mit 30 Schülern, die vielleicht

zu zweit je 5-10 Paare von Zufallsbrüchen verarbeiten, sollte man also in aller Regel mit Meßwerten rechnen können, die eine Dezimale exakt wiedergeben (Natürlich müssen *alle* Einzelergebnisse zusammengefaßt werden).

Inzwischen ist  $P(\text{ggT}(a, b) > 1)$  auch in einem 6. Schuljahr eines Gymnasiums in Hagen von den Schülern für  $0 \leq a, b \leq 99$  ( $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ ) geschätzt worden. Dabei wurden die Zahlen 00, 01, 02, ... 99 auf kleine verschiedenfarbige Kärtchen geschrieben, einmal für den Zähler und einmal für den Nenner, und zufällig aus zwei „Urnen“, aus unterrichtstechnischen Gründen allerdings ohne Zurücklegen, gezogen. Das Ergebnis traf den theoretischen Wert ebenfalls (zufällig natürlich) sehr gut.

*Bemerkung:* Im Stochastikunterricht könnte man sich überlegen, daß man damit rechnen muß, daß die Wahrscheinlichkeit relativ seltener Ereignisse durch Simulation weniger leicht (weniger genau) zu schätzen ist als die häufiger Ereignisse. Die erste Ziffer jeder der oben geschätzten Wahrscheinlichkeiten ist trotz der geringen Anzahl der Versuche erstaunlich gut getroffen worden.

*Ergänzung:* Man kann natürlich auch versuchen, solche Wahrscheinlichkeiten auszurechnen. Ich habe bisher erhalten ( $P$  sei hier die Menge der Primzahlen):

$$(I) P_d(\text{ggT}(ad + bd, bd) = 1) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{3p-2}{p^3}\right) = 0.287 \text{ (gerundet),}$$

$$\text{also } P_d(\text{ggT}(ad + bd, bd) > 1) = 1 - 0.287 = 0.713$$

$$(II) P_{dk}(\text{ggT}(ad + bd, bd) = 1) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2}\right) = 0.776 \text{ (gerundet),}$$

$$\text{also } P_{dk}(\text{ggT}(ad + bd, bd) > 1) = 1 - 0.776 = 0.224.$$

Diese Zahlenwerte stimmen mit den experimentell gewonnenen Werten sehr gut überein. - Ich werde in einem weiteren Aufsatz mit dem Thema „Teilbarkeitslehre für Zufallszahlen“ diese Formeln herleiten.

## 6. Abschließende Bemerkungen

Zum Schluß möchte ich noch ein Plädoyer für diese Art der Verbindung von verschiedenen Gebieten des Mathematikunterrichts vortragen. Durch

die Verbindung von Themen aus der Bruchrechnung/Teilbarkeitslehre einerseits mit der Stochastik andererseits wird Schubladendenken gestört bzw. werden subjektive Erfahrungsbereiche („frames“) vernetzt. Die Schüler werden sehr erstaunt sein, daß so etwas möglich ist.

- Bruchrechnung wird implizit wiederholt, unter einer neuen Fragestellung und unter neuen Gesichtspunkten. Welches Additionsverfahren bedingt die kleinsten Zwischenwerte und führt zu leicht kürzbaren Summenbrüchen? Der ggT wird aufgewertet!
- Stochastik wird innerhalb der Mathematik angewandt. Es handelt sich um eine bedeutsame Anwendung, die aber nicht die Schwierigkeiten macht, die bedeutsame mathematische Anwendungen in anderen Bezugswissenschaften in der Regel mit sich bringen.
- Man kann die Fragestellung erweitern und variieren. Wie verhält es sich mit der Subtraktion von Brüchen? Welche Ergebnisse erhält man, wenn man als „schwer kürzbar“ Summenbrüche betrachtet, deren ggT  $\geq 11$  ist (z. B.) ?

## Literatur:

- KILIAN, H.: Addition von Brüchen durch Ausklammern. Praxis der Mathematik 34, (1992), 7-8
- KNUTH, D. E.: The Art of Computer Programming. 2nd Edition, 1981
- ENGEL, A.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Bd. 2, Stuttgart 1976
- WETZEL, W., JOHNS, M. D., NAEVE, P.: Statistische Tabellen, de Gruyter Verlag, Berlin 1967

Prof. Dr. HANS KILIAN  
 Institut für Didaktik der Mathematik  
 Universität Dortmund  
 Vogelpothsweg 87  
 44221 Dortmund