Darstellung und Analyse der Anzahl der Teiler natürlicher Zahlen mit Methoden der Explorativen Datenanalyse

Von HANS KILIAN, Dortmund

Zusammenfassung: *Darstellung der Anzahl der Teiler der Zahlen von 1 - 50 (bzw. 1 - 99) in einer aus der Explorativen Datenanalyse angeregten Form, als Ergänzung für die Auseinandersetzung mit dem Phänomen der Teilbarkeit der Zahlen im 6. Schuljahr.*

Beschreibende Statistik und Explorative Datenanalyse (EDA) beschäftigen sich mit der Darstellung, Beobachtung und Analyse von Daten für statistische Detektivarbeit. Auch in der Mathematik gibt es Gesetzmäßigkeiten in den mathematische Phänomene zu entdecken, und eine geschickte Darstellung der mathematischen Daten kann dabei helfen. Ich demonstriere das an einem Beispiel aus der Teilbarkeitslehre. Die Ausgangsfragestellung sei:

> Wie viele Teiler haben die Zahlen?
> Wie viele Teiler haben z.B. die Zahlen von 1- 50?

Dazu untersuchen die Schüler und Schülerinnen (SS) die Teilermengen dieser Zahlen und stellen die Ergebnisse in den folgenden tabellarischen Darstellungen zusammen, die ersichtlich an den Stengel & Blatt-Diagrammen aus der EDA orientiert sind. Die erste Darstellung könnte folgendermaßen aussehen:

Anzahl der Teiler der Zahlen von 1 bis 50

Anz.	Zahlen
1	1
2	2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47
3	4 9 25 49
4	6 8 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 38 39 46
5	16
6	12 18 20 28 32 44 45 50
7	—
8	24 30 40 42
9	36
10	48

Tab. 1

Stochastik in der Schule **15**(1995), Nr. 2, S. 51-56

Der Grundgedanke für die Wahl dieser Darstellung ist, daß man die Zahlen selbst auch darstellen will, damit man sie mit ihrer Teileranzahl zusammen sehen und so vielleicht Auffälligkeiten, Regelmäßigkeiten, Zusammenhänge, ... beobachten kann. Wenn man nur zählen würde, wie viele Zahlen mit 1, 2, ... Teilern es in dem betrachteten Abschnitt von $N_n = \{1, 2, 3, ...\}$ gäbe, und dies in einer Art Funktionstabelle darstellen würde, wäre es, im allgemeinen, viel schwieriger interessante Sachen zu entdecken.

Weiterentwicklung der Darstellung

Ein weiterer Grundgedanke der EDA ist es, graphische Darstellungen weiterzuentwickeln und sie zu verbessern, und schließlich zu einer Präsentationsform zu gelangen.

(I) Um zu kontrollieren, daß man keine Zahl vergessen hat, wird man die Anzahl der Einträge in den einzelnen Zeilen zählen, rechts außerhalb der Zeilen in Klammern (!) diese Häufigkeiten notieren und schließlich addieren. Es muß 50 als Summe herauskommen.

(II) Es fällt dabei vielleicht auf, daß die Zeilen 2 und 4 sowie 3 und 8 unterschiedlich lang sind, obwohl sie gleich viele Einträge enthalten. Das kommt daher, daß die Zahlen 1 - 9 einziffrig sind, die anderen Zahlen aber alle zweiziffrig. Man könnte dieses Problem beseitigen, wenn man alle Zahlen zweiziffrig darstellen würde, also 1, 2, ... ,9 durch 01, 02, ... ,09.

Dadurch ergibt sich schließlich die folgende "Präsentationsform" unseres Ergebnisses, das auf diese Weise die oben angesprochene Wertetabelle auch noch liefert:

Anzahl der Teiler der Zahlen von 1 bis 50

Anz.	Zahlen	#
1	01	(1)
2	02 03 05 07 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47	(15)
3	04 09 25 49	(4)
4	06 08 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 38 39 46	(15)
5	16	(1)
6	12 18 20 28 32 44 45 50	(8)
7	—	(0)
8	24 30 40 42	(4)
9	36	(1)
10	48	(1)
		(50)

Tab. 2

Beobachtungen, Fragen, Bemerkungen:

(1) Die Eins ist die einzige Zahl, die nur einen Teiler hat. (Sie spielt überhaupt in der Teilbarkeitslehre eine Sonderrolle).

Bemerkung: Bei der Aufstellung der Tabelle muß vermutlich noch einmal darauf eingegangen werden, daß jede Zahl $a \in \mathbf{N}$ die Teiler 1 und a hat, daß es also sinnvoll ist, diese "trivialen Teiler" neben den "echten Teilern" mitzuzählen. Eine geeignete Grundlage hierfür wäre z.B. das Rechteckmodell der Teilbarkeit.

(2) Eine ganze Reihe von Zahlen hat nur zwei Teiler, nämlich die trivialen Teiler. Dies sind die Zahlen, die nicht zusammengesetzt sind, also die Primzahlen.

Bemerkung: Dies ist hier im allgemeinen nur als ein "Vorwegweiser" auf die Primzahlen und die Primfaktorzerlegung zu verstehen.

(3) Viele Zahlen haben vier Teiler, aber nur wenige haben drei Teiler. Auch 5, 7, und 9 Teiler kommen selten vor.

(4) Ungerade Teileranzahlen kommen selten vor! Wieso?
Welche Zahlen haben eine ungerade Anzahl von Teilern?

Bemerkung: Bei der Aufstellung der Tabelle, die ja einen nicht unerheblichen Arbeitsaufwand erfordert, werden die SS schon wieder darauf aufmerksam geworden sein, daß man Teiler in aller Regel paarweise findet:

Beispiel: $44 = 1 \cdot 44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11$, $T(44) = \{1, 44, 2, 22, 4, 11\} = \{1, 2, 4, 11, 22, 44\}$
aber: $49 = 1 \cdot 49 = 7 \cdot 7 = 7^2$ $T(49) = \{1, 49, 7\} = \{1, 7, 49\}$.

Daß nur die Quadratzahlen (und zwar jede Quadratzahl) eine ungerade Teilerzahl haben, ist vielleicht die wichtigste und überraschendste Entdeckung, die man hier machen kann.

(5) Gibt es überhaupt keine Zahl mit sieben Teilern (oder gibt es nur keine in dem Abschnitt $\mathbf{N}_{50} = \{1, 2, 3, ..., 50\}$)?

(6) Gibt es zu jeder ungeraden Zahl $n \in \mathbf{N}$ eine natürliche Zahl mit genau n Teilern?

Bemerkung: Die später noch aufzustellende Tabelle der Teileranzahlen von 1 bis 99 könnte vielleicht die Vermutung anregen, daß man unter den Zweierpotenzen $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...$ eine findet mit genau n Teilern.

(7) Wieso gibt es so viele Zahlen mit vier Teilern, also mit zwei echten Teilern?
Welche Zahlen haben genau vier Teiler?

(8) Warum hat 48 so viele Teiler?
Welche Zahlen haben viele Teiler?

(9) Als Statistiker würde man ja wohl sagen, daß die "Population" $\mathbf{N}_{50}$, die hier untersucht wird, anscheinend aus zwei Populationen zusammengesetzt ist, nämlich aus den Quadratzahlen aus $\mathbf{N}_{50}$ und aus den Nichtquadratzahlen aus $\mathbf{N}_{50}$. Eigentlich sollte man diese trennen, wenn es um die Teileranzahlen geht:

Anzahl der Teiler der Nichtquadratzahlen von 1 bis 50

Anz.	Zahlen	#
2	02 03 05 07 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47	(15)
4	06 08 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 38 39 46	(15)
6	12 18 20 28 32 44 45 50	(8)
8	24 30 40 42	(4)
10	48	(1)
		(43)

Tab. 3

Anzahl der Teiler der Quadratzahlen zwischen 1 und 50

Anz.	Zahlen	#
1	01	(1)
3	04 09 25 49	(4)
5	16	(1)
7	—	(0)
9	36	(1)
		(7)

Tab. 4

(10) Was heißt hier eigentlich viele Teiler, wenige Teiler? Es sei Q_n die Menge der Quadratzahlen $\leq n$. Was ist die mittlere Anzahl (arithmetisches Mittel, Median) der Teiler der Zahlen in $\mathbf{N}_n \backslash Q_n$, in Q_n?

Bemerkung: Die Mediane können direkt aus Tab. 3 bzw. Tab. 4 abgelesen werden!

(11) Alle Zahlen, die viele Teiler haben, sind auch relativ große Zahlen. Die Umkehrung hiervon gilt allerdings nicht: Auch unter den großen Zahlen gibt es immer wieder Zahlen, die nur zwei Teiler haben, die also Primzahlen sind.
Gibt es beliebig große Primzahlen?

Anzahl der Teiler der Zahlen von 1 bis 99

Anz.	Zahlen	#
1	01	(1)
2	02 03 05 07 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97	(25)
3	04; 09; 25; 49	(4)
4	06 08 10 14 15 21 22 26 27 33 34 35 38 39 46 51 55 57 58 62 65 69 74 77 82 85 86 87 91 93 94 95	(32)
5	16 81	(2)
6	12 18 20 28 32 44 45 50 52 63 66 68 75 76 92 98 99	(17)
7	64	(1)
8	24 30 40 42 54 56 70 78 88	(9)
9	36	(1)
10	48 80	(2)
11	—	(0)
12	60 72 84 90 96	(5)
		(99)

Tab. 5

Zum Abschluß stellen wir noch die Ergebnisse für die Untersuchung der Teileranzahlen in $N_{99} = \{1,2,...,99\}$ zur Verfügung, die man vielleicht als Hausaufgabe (verteilt auf mehrere Gruppen) stellen kann. Die wichtigste Beobachtung, die man hier noch machen kann, ist vielleicht, daß die Teileranzahl zwei (der Primzahlen) nicht mehr so häufig vorkommt wie die Teileranzahl vier.

Als letzte Fragen sollen hier aufgeworfen werden:

(12) Kann man nicht auch auf eine andere Art und Weise als über die Teilermenge einer Zahl die Anzahl ihrer Teiler feststellen?

(13) Wieso gibt es weniger Zahlen mit zehn Teilern als mit zwölf Teilern?

Prof. Dr. Hans Kilian
Universität Dortmund
D-44221 Dortmund
Tel.: 0231/755-2139