Bedingte Wahrscheinlichkeit Verstehen

Stephen Tomlinson, Univ. of Alabama, und *Robert Quinn*, Univ. of Nevada;
Übersetzung: *Manfred Borovcnik*, Klagenfurt

Zusammenfassung: Der Artikel bietet einen neuen Zugang, das schwierige Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit zu unterrichten. Die Betonung liegt dabei auf Unterrichten und Schließen. Als technische Hilfsmittel werden Venn-Diagramme und Baumdiagramme eingesetzt.

1. Einleitung

Oberstes Ziel von Ausbildung ist die Förderung von Verstehen: ein Beherrschen von Begriffen und Verfahren, welches die intelligente Lösung von Problemen in neuen und ungewöhnlichen Situationen ermöglicht. In der Mathematik ist dieses Ziel besonders herausfordernd, weil Lernende oft sehr geschickt die Regeln und Formeln auswendig merken, welche erforderlich sind, um wohldefinierte Prüfungs- und Lehrbuchprobleme zu lösen, ohne daß sie jemals die Bedeutung oder die Logik der Argumente, die sie verwenden, einsehen. Wie einschlägige Forschung belegt, können außerhalb der Schule sogar die vertrautesten Operationen zugunsten von intuitiven Beurteilungen vernachlässigt werden (Gardner 1991, Piattelli-Palmarini 1994). Aber , so zeigt auch die Erfahrung, während der gesunde Menschenverstand nützliche Lösungen für viele Probleme bereit stellt, können uns *natürliche* Theorien zu schwerwiegenden Fehlern verleiten. Um ihre intellektuellen Fähigkeiten zu verbessern, müssen Studierende die Grenzen ihrer spontanen Problemlösefähigkeiten einsehen lernen und *sekundäre* Intuitionen entwickeln für die präziseren und mächtigen Denkwerkzeuge der Mathematiker (Fischbein 1987).

2. Wahrscheinlichkeit und Bewertung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist eines der schwierigsten Gebiete, wenn man diese Ziele erreichen will. Auf der einen Seite enthalten die Gesetze der Wahrscheinlichkeit viele abstrakte Ausdrücke, komplexe Terme und ineinander geschachtelte Beziehungen, die für Lernende schwer zu verstehen sind. Auf der anderen Seite haben Psychologen, aufbauend auf den Pionierarbeiten von Amos

Tversky und Daniel Kahneman, gezeigt, daß alle Menschen der Wirklichkeit mit Erwartungen und Stereotypen entgegentreten, die eine starke und oft verdrehende Wirkung auf die Beurteilung ausüben (Tversky und Kahneman 1974).

Betrachten wir etwa als Beispiel, wie das Gedächtnis folgendem Problem seine Handschrift aufprägt: Sei unterstellt, daß Linda eine 31jährige alleinstehende Frau ist, welche sich offenherzig zu sozialen Fragen wie Entwaffnung oder Gleichberechtigung äußert; welche der folgenden Behauptungen ist dann eher wahr?

R: Linda ist Kassierin in einer Bank

Q: Linda ist Kassierin in einer Bank und aktiv in der feministischen Bewegung

Laut Kahneman und Tversky wählten mehr als 80% der Befragten - es befanden sich auch in Statistik Geschulte darunter - die Antwort Q, obwohl die Menge der weiblichen Bankkassiere, die Feministinnen sind, in der Menge aller Bankkassierinnen enthalten ist (d.h. da Q f R , gilt P(Q) # P(R)) (siehe Kahneman, Slovic und Tversky 1982). Wir stellten dieselbe Fragen achtzehn Mathematiklehrerstudenten und stellten fest, daß nur zwei davon R als das wahrscheinlichere Ereignis bewerteten!

Der verzerrende Einfluß unserer natürlichen Denkfähigkeiten kann daher verfolgt werden in der Art, wie Leute systematisch relevantes Wissen in Entscheidungsprozessen außer Acht lassen. Um z.B. zu prüfen, wie Versuchspersonen Basishäufigkeiten (i.e. a priori-Häufigkeiten in einem Bayesianischen Denkmodell) in ihre Bewertungen einbauen, konfrontierten Tversky und Kahneman zwei Versuchsgruppen mit 100 Charakterbeschreibungen. Während der Gruppe A gesagt wurde, daß die Dossiers zu 70 Rechtsanwälten und 30 Ingenieuren gehörten, wurde der Gruppe B die Information gegeben, daß es sich um 70 Ingenieure und 30 Rechtsanwälte handelt. Dennoch, trotz dieser verschiedenen Grundgesamtheiten, gruppierte jede Gruppe ihre Zuordnungen in ungefähr gleichem Anteil - obgleich Gruppe A etwa doppelt so viele Rechtsanwälte als im Vergleich dazu Gruppe B identifizieren hätte sollen! Interessanterweise ordneten beide Gruppen die Rechtsanwälte und Ingenieure jeweils 50:50 und nicht 70:30 bzw. 30:70 zu, wenn sie mit einem Stapel neutraler Persönlichkeitsbeschreibungen konfrontiert waren wie etwa (siehe Tversky und Kahneman 1974):

"Dick ist ein 30jähriger Mann. Er ist verheiratet, hat keine Kinder. Ein Mann von hohen Fähigkeiten und hoher Motivation, er verspricht, sehr erfolgreich in seinem Beruf zu werden. Er ist bei Kollegen sehr beliebt."

Nach Howard Gardner sind die kognitiven Heuristiken, welche unser Schließen in solchen Fällen natürlich leiten gut vergleichbar mit optischen Täuschungen - Bahnen im Denken, welche nach einiger Überlegung sich als falsch erweisen. Und dennoch, trotz ihrer intuitiven Unvermeidlichkeit glaubt Gardner, daß solche Urteile durch Metakognition, den bewußten Gebrauch von mathematischen Werkzeugen, überwunden werden können. Ebenso wie wir die Regeln der Logik anwenden können, um zu gültigen Schlußfolgerungen zu gelangen, so kann uns, so argumentiert er, Wissen um Wahrscheinlichkeit helfen, intakte (Inferenz-)Schlüsse zu formulieren. Das Problem besteht darin, daß die Fähigkeit, solch sekundäres Denken anzuwenden, gerade nicht gefördert wird durch traditionelle Unterrichtspraktiken, die ein Auswendiglernen von Formeln stark gewichten.

In jüngeren Jahren haben Didaktiker und Lehrer darauf reagiert durch Ausarbeitung zahlreicher pädagogischer Strategien, welche den Studenten helfen, die Grenzen ihrer subjektiven Theorien zu erkennen und zu lernen, wie stochastische Beziehungen objektiv zu untersuchen sind. So etwa betonen viele Artikel der Intern. Conferences on Teaching Statistics (ICOTS) die Notwendigkeit, daß Studenten Experimente selbst durchführen, Spiele durchprobieren, Computersimulationen einsetzen oder graphische Darstellungen nutzen, damit sie ein empirisch gegründetes Maß für das Auftreten von Ereignissen bekommen (Grey u.a. 1988).

Solche konkreten Aktivitäten sind erforderlich, damit man so etwas schafft, was man "sokratische Begegnung" mit den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit nennen könnte; sie verschaffen ein Niveau persönlicher Anlage in die Auflösung solch problematischer Situationen, welches erlaubt, Beurteilungen in Frage zu stellen, und mathematische Gesetze offen zu betrachten. Wenn jedoch die Studenten normative Methoden zur Problemlösung verstehen und anwenden sollen, um ihren Entscheidungsprozeß besser auszuleuchten, müssen diese praktischen Erkundungen unterstützt werden durch theoretische Modelle von Ereignissen, seien sie frequentistisch oder klassisch (Laplacesch), denn nur durch ein intuitives Verständnis mathematischer Argumente kann intelligentes Denken und rationale Beurteilung unterstützt werden.

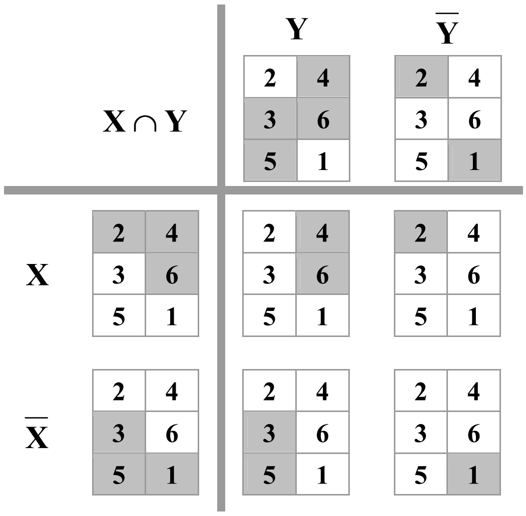
Dennoch empfinden Studenten den Begriff unabhängiger Ereignisse und die Gesetze bedingter Wahrscheinlichkeit als extrem schwierig zu verstehen (siehe Shaughnessy 1993). In der folgenden Erörterung bieten wir einen neuen Zugang zu diesen Konzepten an, welcher Studenten helfen kann, ein funktionierendes Verständnis der Wahrscheinlichkeitsgesetze zu entwickeln. Durch bildliche Darstellung von Ereignissen zeigen wir, wie Venn- und Baumdiagramm zu einem einzigen Problemlösewerkzeug zusammengeführt werden können, was einen graphischen Mechanismus bereitstellt zur Darstellung bedingter Wahrscheinlichkeiten und zur Beantwortung Bayesianischer Fragen, ohne daß sich die Studenten komplexe Formeln zu merken hätten. Da bedingte Wahrscheinlichkeitsbezüge und das Bayes-Theorem im Kern der wissenschaftlichen Methode liegen und in der Tat auch in die alltägliche Erfahrung einsickern, ist die Entwicklung solcher Denkwerkzeuge grundlegend für sachkundiges Entscheiden in vielen Situationen.

3. Venn-Diagramme

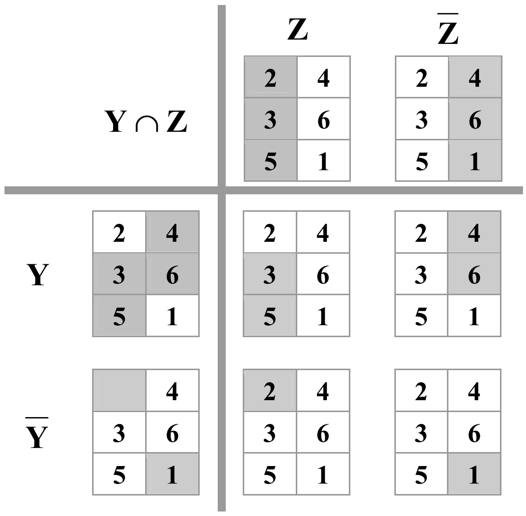
Betrachten wird die folgenden drei Ereignisse im Zusammenhang mit dem Wurf eines fairen Würfels:

X: "Eine gerade Zahl"
Y: "Eine Zahl größer als 2"
Z: "Eine Primzahl"

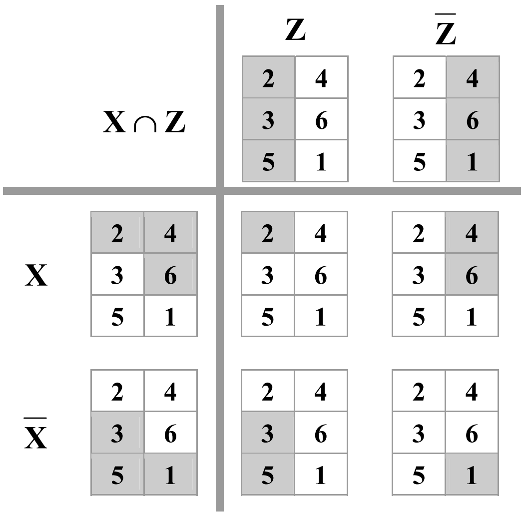
Während Venn-Diagramme hilfreich sind, jene Versuchsausgänge auszusondern, die verschiedenen Ereignissen gemeinsam sind, zeigen sie nicht klar die zugrunde liegenden Beziehungen der Abhängigkeit und Unabhängigkeit, welche wesentlich sind für die Lösung von Aufgaben mit bedingten Wahrscheinlichkeiten. Ereignisse mögen logisch oder zufallsbedingt miteinander zusammenhängen, letzteres in der Art, daß ein Auftreten des einen die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses erhöht oder verringert. Demgemäß, während die Wahrscheinlichkeit für Regen *unabhängig* von unseren Wünschen ist, *hängt* die Zahl der Leute, welche den Regenschirm zur Arbeit mitnehmen, von der Wettervorhersage *ab*.



$\mathbf{X \cap Y}$	$P(Y) = \frac{2}{3}$	$P(\overline{Y}) = \frac{1}{3}$
$P(X) = \frac{1}{2}$	$P(X \cap Y) = \frac{1}{3}$	$P(X \cap \overline{Y}) = \frac{1}{6}$
$P(\overline{X}) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{X} \cap Y) = \frac{1}{3}$	$P(\overline{X} \cap \overline{Y}) = \frac{1}{6}$



$\mathbf{Y \cap Z}$	$P(Z) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{Z}) = \frac{1}{2}$
$P(Y) = \frac{2}{3}$	$P(Y \cap Z) = \frac{1}{3}$	$P(Y \cap \overline{Z}) = \frac{1}{3}$
$P(\overline{Y}) = \frac{1}{3}$	$P(\overline{Y} \cap Z) = \frac{1}{6}$	$P(\overline{Y} \cap \overline{Z}) = \frac{1}{6}$



$\mathbf{X \cap Z}$	$P(Z) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{Z}) = \frac{1}{2}$
$P(X) = \frac{1}{2}$	$P(X \cap Z) = \frac{1}{6}$	$P(X \cap \overline{Z}) = \frac{1}{3}$
$P(\overline{X}) = \frac{1}{2}$	$P(\overline{X} \cap Z) = \frac{1}{3}$	$P(\overline{X} \cap \overline{Z}) = \frac{1}{6}$

Abb. 1: Tabellen mit Durchschnittsmengen für X, Y und Z

Im Fall der Ereignisse X, Y und Z jedoch sind solche Beziehungen keineswegs offensichtlich. Erhöht oder verringert die Kenntnis, daß eine Primzahl geworfen worden ist, die Wahrscheinlichkeit, daß der Versuchsausgang eine gerade Zahl ist, oder bleibt diese Information ohne Auswirkung auf die letztere Wahrscheinlichkeit? Wie kann weiters, unter den gegebenen Bedingungen, die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß beide Ereignisse (Primzahl und gerade Zahl) eintreten? Wie die Geschichte von Linda zeigt, können solche Fragen, welche zentral für viele Wahrscheinlichkeitsprobleme sind, nur beantwortet werden, wenn die impliziten Beziehungen zwischen Ereignissen ganz verstanden werden.

Wie Abb. 1 zeigt, ist es möglich, die Wahrscheinlichkeit kombinierter Ereignisse wie "A *und* B" zu finden, indem man alle einzelnen Versuchsausgänge innerhalb der entsprechenden Regionen im Venn-Diagramm zusammenfaßt. Aber Vorsicht: Der Wert $P(A \cap B)$ ist nicht immer gleich dem Produkt $P(A) \cdot P(B)$ (auch wenn in der Logik, in der Praxis bzw. im englischsprachigen Kontext $A \cap B$ oft verkürzt als "Produkt" AB angeschrieben wird!). So etwa zeigen die "Durchschnittstabellen" für $X \cap Y$ und $Y \cap Z$, daß

$$P(X \cap Y) = P(X)\ P(Y) \text{ und } P(Y \cap Z) = P(Y)\ P(Z);$$

die Tabelle für $X \cap Z$ zeigt, daß

$$P(X \cap Z) \neq P(X)\ P(Z).$$

Dies deswegen, weil X und Z abhängige Ereignisse sind - sie beeinflussen wechselweise die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses - während X und Y sowie Y und Z jeweils unabhängige Ereignisse sind.

Eine der häufigsten Annahmen, die Studenten treffen, ist, daß die Wahrscheinlichkeit des kombinierten Und-Ereignisses durch Multiplizieren der Einzelwahrscheinlichkeiten berechnet werden kann. Während nun diese empirische "Produktregel" für unabhängige Ereignisse zutrifft (wie für Y und Z), müssen Studenten dazu gebracht werden, zu würdigen, wie diese Formel zusammenbricht, wenn es um abhängige Ereignisse geht. Bringt man die Schüler dazu, all diese Wahrscheinlichkeiten $P(X), P(X \cap Y), P(X \cap \overline{Y})$ usw. aus den Tabellen zu berechnen, so werden sie damit direkt konfrontiert und, so argumentierten wir, dies bringt einen kräftigen Anreiz, diese Ereignisse mathematisch zu untersuchen.

Studenten die Formel $P(A \cap B) = P(A)\ P(B \mid A)$ auswendig lernen und sie in Textbuchbeispielen anwenden zu lassen, wird klarerweise nicht ihr Verständnis von Wahrscheinlichkeitsgesetzen sicher stellen. Weil der Ausdruck $P(B \mid A)$, die Wahrscheinlichkeit von B gegeben A, einen Vergleich von Versuchsausgängen in der Menge A bzw. in der Menge $A \cap B$ erfordert, müssen die zugrundeliegenden Beziehungen zwischen den Ereignissen über die Teilmengenrelation aufgefaßt werden. Tatsächlich sind alle Wahrscheinlichkeiten bedingte Wahrscheinlichkeiten und werden nach derselben fundamentalen Definition berechnet:

$$P(\text{Ereignis}) = \frac{P(\text{Lösungsmenge})}{P(\text{Ergebnismenge})}$$

Sogar Ereignis Z, eine Primzahl zu werfen, hängt davon ab, ob der Würfel fair ist. Folglich

$$P(Z) = P(Z \mid \text{Fairer Würfel}) = P(Z \mid \text{Universalmenge}) =$$

$$\frac{\text{Summe aller Wahrscheinlichkeiten von Versuchsausgängen in der Menge } Z}{\text{Summe aller Wahrscheinlichkeiten von Versuchsausgängen in der Menge } U} = \frac{3/6}{6/6} = \frac{1}{2}$$

Dieses Argument kann bildlich gefaßt werden, indem man die Fläche jeder Region innerhalb des Venn-Diagramms gerade der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses entsprechen läßt, welches sie repräsentiert. Folglich hat die Universalmenge eine Fläche von 1 und, im Beispiel oben, die Menge Z hat eine Fläche von ½.

$$P(Z) = \frac{\text{Fläche der Region } Z}{\text{Fläche der Region } U} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Im allgemeinen hat man für zwei beliebige Ereignisse, vorausgesetzt $P(A) \neq 0$:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\text{Fläche der Region } A \cap B}{\text{Fläche der Region } A}$$

Folglich erhält man aus Abb. 1: Wenn A durch das Dreieck und B durch das obere Rechteck repräsentiert werden, so gilt:

$$P(A) = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = \frac{1}{8}; P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$P(Z \mid X) = \frac{P(Z \cap X)}{P(X)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

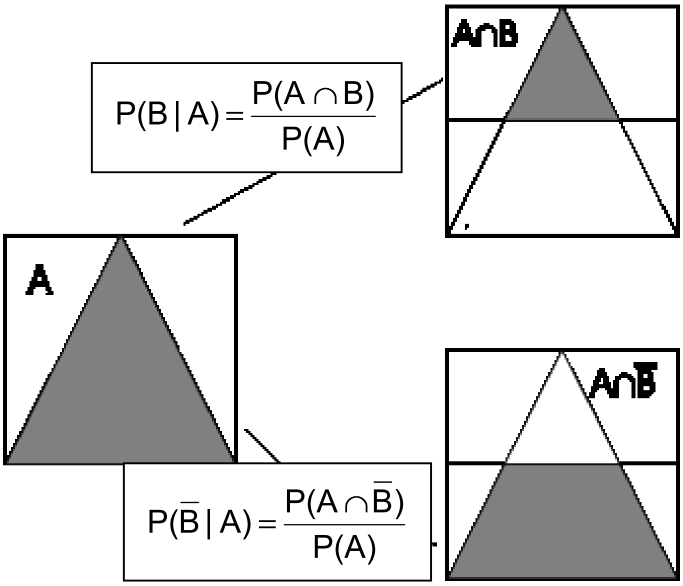


Abb.2: Gesetze für bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wie aber werden Werte wie $P(Z \cap X)$ bestimmt, ohne daß man alle einander ausschließenden Versuchsausgänge in einem Venn-Diagramm abzählt? Hier müssen wir auf das zweite unserer mathematischen Werkzeuge zurückgreifen, das Baumdiagramm.

4. Baumdiagramme

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in mehrstufigen Experimenten werden meist mit Hilfe von Baumdiagrammen bestimmt. Zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, zwei Köpfe zu erhalten, wenn man eine Münze dreimal wirft, oder, die Wahrscheinlichkeit, zufällig zwei grüne Kugeln aus einem Krug zu ziehen, der eine blaue, drei grüne und zwei weiße Kugeln enthält. In solchen Fällen ist die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Ereignissen klar festgelegt durch die kausale Abfolge des Experiments. Es ist leicht einzusehen, daß das Resultat des einen Münzwurfes nicht beeinflußt, wie der nächste ausgehen wird; dagegen wird Entfernen einer blauen Kugel aus dem Krug die Wahrscheinlichkeit zukünftiger Auswahlen beeinflussen.

Die Schwierigkeiten beginnen bei Ereignissen wie X, Y und Z, wo bedingte Beziehungen bestimmt werden müssen durch Überprüfen *logischer* Beziehungen, die durch die Struktur ihrer Teilmengen bestimmt werden. Wir schlagen vor, Venn-Diagramme mit Baumdiagrammen zu kombinieren, indem man festlegt, daß die verschiedenen Verzweigungen eine geordnete Teilmengenbeziehung für einander ausschließende Ereignisse darstellen. (Liest man in der gegenläufigen Richtung, so werden Venn-Diagramme auf jeder Stufe zur Vereinigung von Mengen der vorhergehenden Stufe.) Die Teilmengen von A sind $A \cap B$ und $A \cap \overline{B}$, während umgekehrt gilt: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$. Der Grundbaustein dieses Programms , die Beziehungen zwischen

$$P(A), \quad P(A \cap B), \text{ und } P(A \mid B)$$

zu definieren, wird in Abb. 2 gezeigt. Wie das Diagramm weiters zeigt, kann man, wenn man von einem Einheitsquadrat ausgeht und es in Ereignisregionen unterteilt, die Fläche als Wahrscheinlichkeit aller einfacher oder kombinierter Ereignisse auffassen.

5. Das Bayes-Theorem

Eine wichtige Klasse von Fragen bezieht sich auf bedingte Wahrscheinlichkeiten, die implizit in einem Experiment oder in entsprechenden Daten gegeben sind und erst berechnet werden müssen. Z.B. könnte man fragen

"Wie hoch ist P(grün beim ersten Zug | blau beim zweiten)?"

Wie bei der Frage nach $P(A|B)$ in Abb. 2 kehrt diese Frage die Richtung des Baumdiagramms um; wenn die Zweige von A nach B führen, wie kann eine Wahrscheinlichkeit berechnet werden, welche von einer Kenntnis über B abhängt, bevor man nach A fragt. Wie Falk (1994) zeigt, haben die meisten Studenten, die man mit solchen diagnostischen Fragen (der Name stammt daher, weil solche Baysianische Beziehungen oft in der medizinischen Diagnostik auftauchen) konfrontiert, wenig bis keine Ahnung, wie nicht-kausale Zusammenhänge berechnet werden können - einige glauben sogar, daß solche Fragen an sich unsinnig sind. Der übliche Zugang zu solchen Fragen geht über die Anwendung der Baysianischen Formel, welche in ihrer einfachsten Form so lautet:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}$$

Wie nützlich auch immer diese Formel sein mag, sie bietet dem Studenten keinerlei Intuition für die Denkprozesse, die notwendig sind, um solche Aufgaben zu lösen. Doch hängt der Ausdruck $P(B|A)$ von einer ganz ähnlichen Teilmengenbeziehung ab wie in den vorhergehenden Beispielen mit bedingter Wahrscheinlichkeit. Das bedeutet:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{Fläche der Region } A \cap B}{\text{Fläche der Region } B}$$

Die Schwierigkeit liegt natürlich darin, daß es kein Venn-Diagramm für die Menge B in einem Baumdiagramm gibt, das mit Ereignis A startet. Wenn es eines gäbe, so könnte $P(A \mid B)$ gleich leicht wie $P(B \mid A)$ abgelesen werden. Aber, so haben wir argumentiert, weil das Baumdiagramm zusammengesetzt ist aus disjunkten Ereignissen, deren Vereinigung die Universalmenge ist, enthält es natürlich die Bausteine, aus denen man neue Venn-Diagramme aufbauen kann. Kurzum, die Menge B - und die Menge $\overline{B}$ - können sehr einfach erzeugt werden, indem man das Baumdiagramm durch Vereinigung von Mengen ausdehnt. Das Ergebnis ist, wie das Diagramm in Abb. 3 für X und Z zeigt, ein Baum mit Pfeilen in beiden Richtungen, der alle Ereignisse enthält, die erforderlich sind, um jede beliebige bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

Natürlich können, sobald die Studenten mit dieser Methode vertraut sind, die Venn-Diagramme aus dem Baumdiagramm wieder weggelassen und durch die Wahrscheinlichkeitswerte ersetzt werden (siehe Abb. 4).

Man betrachte das folgende Beispiel, ursprünglich von Kahneman und Tversky (1974) präsentiert, welches zu einer Art Klassiker in der Literatur über bedingte Wahrscheinlichkeitsurteile geworden ist (Scholz 1987).

> Ein alter Mann wird Zeuge eines Autounfalls mit Fahrerflucht und berichtet, daß das flüchtende Auto ein blaues Taxi gewesen sei (Behauptung b). Es gibt zwei Taxiunternehmen in der Stadt, die blaue (B) mit 15 und die grüne (G) mit 85 Autos. In der Verhandlung wird die Sehfähigkeit des Mannes geprüft und man

bekommt heraus, daß er in 80% der Fälle die richtige Farbe zuordnen kann, d.h. $P(b \mid B) = P(g \mid G) = 0{,}8$.

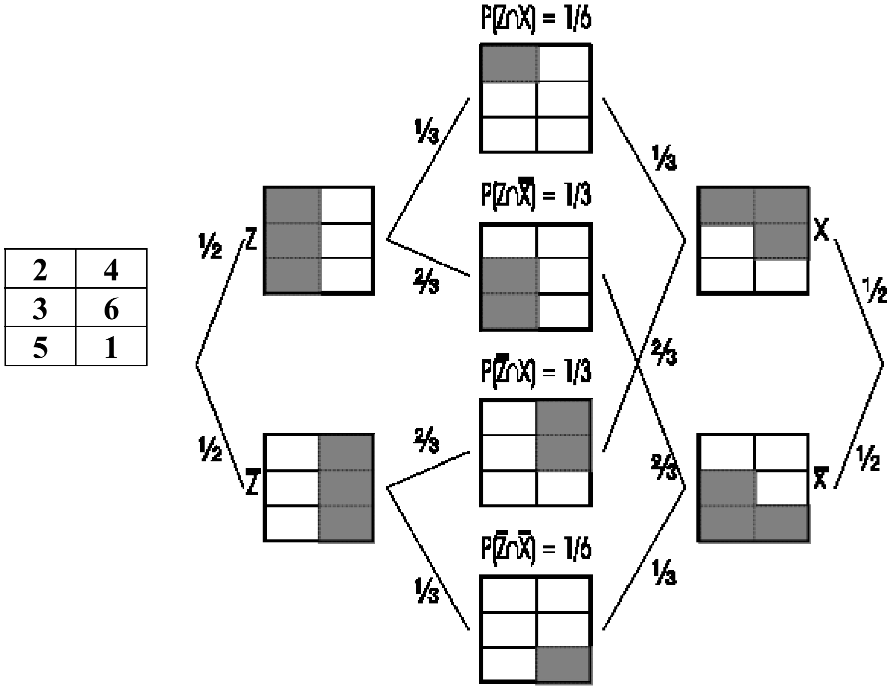


Abb. 3: Baumdiagramm für X und Z

Nachdem sie diese Information geben, stellen Tversky und Kahneman die folgende Baysianische Frage:

Q: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein blaues Taxi in das Verbrechen verwickelt war?

Die meisten Versuchspersonen raten, daß der Wert von Q weit über ½ liegt. in unseren eigenen Versuchen fanden wir heraus, daß auch Mathematiklehrerstudenten geneigt sind, die Beurteilung des alten Mannes als zuverlässig einzustufen.

Doch, wie überzeugend dieses Argument auch sein mag, Geschworene, die nach dieser Überlegung zum Urteil kommen, würden wahrscheinlich den falschen Fahrer ins Gefängnis schicken! Denn, folgt man unserer Schlußweise, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein blaues Taxi in den Unfall verwickelt war, zufolge der Behauptung des alten Mannes gleich:

$$P(B \mid b) = \frac{P(B \cap b)}{P(b)}$$

[Hier wird nicht unterschieden, ob es sich um Aussagen handelt, oder um Mengen von Versuchsergebnissen, die für diese Aussagen "günstig" sind.]

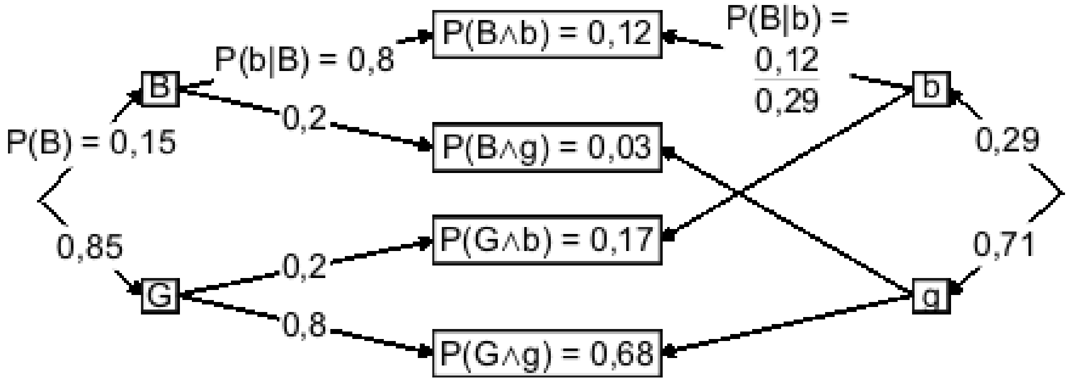


Abb. 4: Das Fahrerfluchtbeispiel

Wie Abb. 4 zeigt, gilt

$$P(b) = P(B \cap b) + P(G \cap b) = 0{,}12 + 0{,}17 = 0{,}29$$

und daher ist

$$P(B \mid b) = \frac{0{,}12}{0{,}29} = 0{,}41\,.$$

Während Shaughnessy (1992) sicherlich recht hat, wenn er dafür plädiert, diese Häufigkeiten in einer Reihe von Versuchen zu simulieren, ist die einfache Methode, die wir zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten vorschlagen, sehr wohl innerhalb der Reichweite der Fähigkeiten der meisten Studenten. In der Tat fanden wir heraus, daß Studenten die Bayes-Formel selbst herleiten konnten mit der einfachen Methode der Erweiterung der Baumdiagramme für die Ereignisse A und B. Ein wünschenswerter Umstand, sofern man zuerkennt, daß auf die Praxis eben Theorie folgen sollte.

6. Abschließende Betrachtungen

Bedingte Wahrscheinlichkeit ist ein schwieriges Thema für Studenten. Seine zentralen Gesetze sind, häufig jeder Intuition widersprechend, zusammengesetzt aus abstrakten Termen und komplexen Gleichungen, welche sich nicht unmittelbar mit subjektiven Intuitionen der Erfahrung vernetzen. Wenn Studenten die mathematischen Fertigkeiten erwerben sollen, die für rationales Bewerten erforderlich sind, muß sich der Unterricht darauf konzentrieren, die persönlichen Verzerrungen und kognitiven Heuristiken, wie sie von Psychologen identifiziert wurden, herauszufordern, und - auf besonders leicht zugängliche Art - die Stärke von stochastischem

Denken demonstrieren.

In unserer Diskussion schlagen wir ein graphisches Werkzeug vor, das bei diesem Vorhaben helfen kann. Obwohl das Model, das wir vorschlagen, nicht auf alle Probleme mit bedingten Wahrscheinlichkeiten passen mag, glauben wir, daß es in Kombination mit empirischen Untersuchungen (Simulationen), wie Shaughnessy sie vorschlägt, zum Werkzeugkoffer der LehrerIn beitragen kann, mit dem er/sie Studierenden hilft, mit abhängigen und unabhängigen Ereignissen, normativen Regeln für kombinierte Ereignisse und der Logik Bayesianischer Fragen zurande zu kommen.

Literatur

Gardner, H. (1991): *The Unschooled Mind*. - New York: Basic Books.

Grey, D.R., Holmes, P; Barnett, V; Constable, G.M. (Hrsg.) (1983): *Proc. First Intern. Conf. on Teaching Statistics*. - Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Falk, R. (1994): Inference under uncertainty via conditional probability. - In: *Studies of Mathematics Education, Vol.7: Teaching Statistics in Schools*. - Paris: UNESCO.

Fischbein, E. (1987): *Intuition in Science and Mathematics*. - Dordrecht: Reidel

Kahneman, D.; Slovic, P.; Tversky, A. (1982): *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. - Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Piattelli-Palmarini, M. (1994): *Inevitable Illusions*. - New York: Wiley and Sons.

Scholz, R. (1987): *Cognitive Strategies in stochastic thinking*. - Dordrecht: Reidel.

Shaughnessy, J.M. (1992): Research in probability and statistics: Reflections and directions. - In: Grouws, D.A. (Hrsg.): *Handbook of research on teaching mathematics and learning*. - New York: Macmillan.

Tversky, A.; Kahneman, D. (1974): Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. - In: *Science* 185, 1124-1131.

Dies ist einem Cartoon von Andrejs Dunkels nachempfunden – Teach. Stat. 1987