Abituraufgaben aus dem Bereich stochastischer Prozesse

Peter Beinke, Petershagen

Einleitung

Die Behandlung stochastischer Prozesse (Markow-Ketten) im Unterricht der Sek. II des Gymnasiums ist meines Wissens nicht sehr verbreitet. Ein Bericht über Abituraufgaben aus diesem Bereich muß deshalb verbunden sein mit einer Skizzierung der hinter solchen Aufgaben stehenden Unterrichtsinhalte. Ich beschreibe eine Unterrichtssequenz aus der Sicht eines Grundkurses und gebe Hinweise zu möglichen Vertiefungen in einem Leistungskurs.

Den Impuls zur Beschäftigung mit dem Thema hat vor über 10 Jahren eine Arbeit von Hans-Jörg Himmeröder gegeben: *Anwendung der Matrizenrechnung in einem Leistungskurs der Jahrgangsstufe 12/II – Bericht über eine Unterrichtsreihe* (Himmeröder 1986). Wichtige Quellen für die weitere Entwicklung eines Unterrichtskonzepts waren auch die Bücher von Arthur Engel (Engel 1976 und 1987).

Es werden zwei Schritte zur Erschließung des Themas dargestellt:

1. Ein nicht stochastischer Prozeß: das Mischen von Flüssigkeiten. Das Beispiel und die Vorgehensweise habe ich von B. von Pape: Markow-Ketten (Pape 1993) übernommen. Es werden u. a. die Arbeitsweisen erschlossen, die Peter G. Doyle/J. Laurie Snell als „Methode der Markow-Ketten" bezeichnen (Doyle 1984). Dabei handelt es sich um die Veranschaulichung von Prozessen durch Übergangsgraphen und ihre mathematische Fassung durch Verteilungsvektoren und Übergangsmatrizen. Die Berechnung des Fixvektors einer Matrix liefert das hier wichtigste Handwerkszeug.
2. Übertragung der „Methode der Markow-Ketten" auf einen stochastischen Prozeß: das Sommerwetter in Petershagen. Dieses von vielen Autoren verwendete Beispiel ermöglicht, die Mittelwertsregeln grundkursgemäß herzuleiten.

Angemerkt sei noch, daß es im Folgenden um die Aufbereitung von Stoff für den Unterricht am Gymnasium, also um Elementarisierung geht und nicht um eine Darstellung auf wissenschaftlichem Niveau.

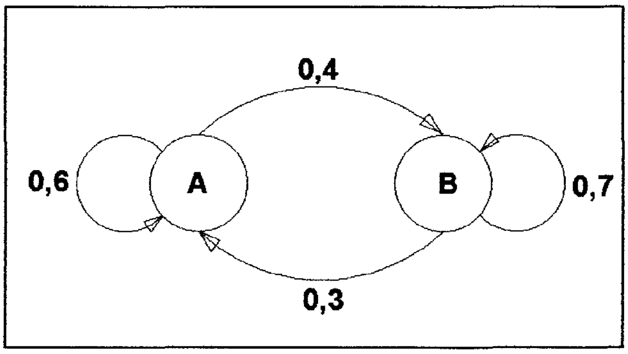
Ein nicht stochastischer Prozeß: Rumverschnitt.

Man hat zwei Behälter A und B. Behälter A enthält 0,7 l Wasser, Behälter B enthält 0,7 l Rum. Man „pansche" nach folgendem Verfahren:

Stochastik in der Schule **19**(1999), H. 1, S. 46-57

I Aus Behälter A werden 40% in eine erste Zwischenstation (Becher 1) gefüllt.
II Aus Behälter B werden 30% in eine zweite Zwischenstation (Becher 2) gefüllt.
III Becher 1 wird in Behälter B, Becher 2 in Behälter A geleert.
IV Abbruch des Verfahrens oder Fortsetzung bei I.

Modellvorstellung: Übergangsgraph



Aufgaben:

a) Stelle die Entwicklung der Füllmengen in A und B für die ersten Umfüllungen dar.
b) Wie entwickelt sich der Rumanteil (der Wasseranteil) in A und B?
c) Kann man eine Prognose für die langfristige Entwicklung geben?

(1) Formale Beschreibung der auftretenden Größen - Berechnung:

a_n Volumen in Behälter A
b_n Volumen in Behälter B
ar_n Rumvolumen in Behälter A
br_n Rumvolumen in Behälter B
aw_n Wasservolumen in Behälter A
bw_n Wasservolumen in Behälter B

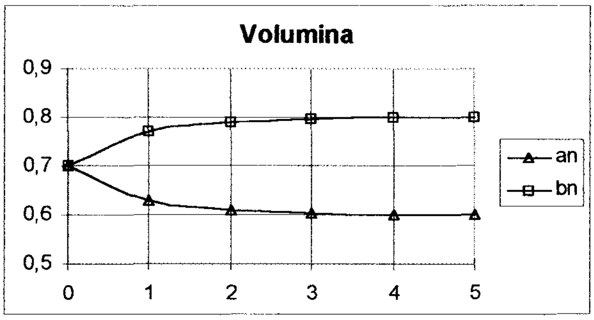
} nach n Umfüllungen

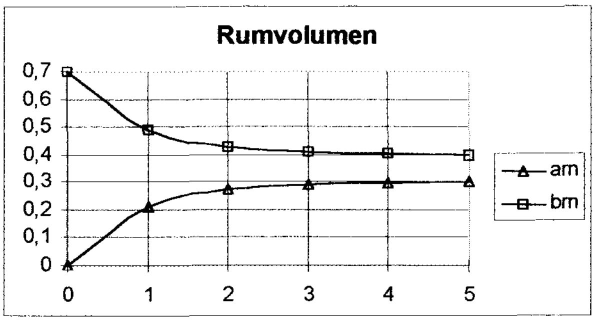
Mit diesen Vereinbarungen lassen sich die Aufgaben a) und b) wie folgt mit dem Taschenrechner lösen:

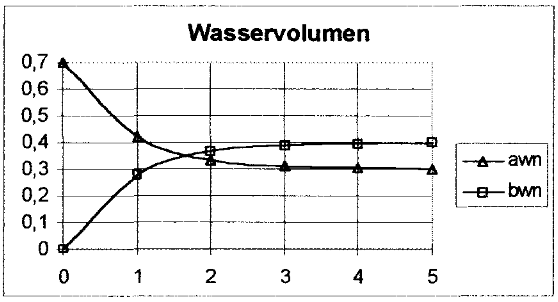
$$a_1 = 0{,}6a_0 + 0{,}3b_0 = 0{,}63 \qquad a_2 = 0{,}6a_1 + 0{,}3b_1 = 0{,}609$$
$$b_1 = 0{,}4a_0 + 0{,}7b_0 = 0{,}77 \qquad b_2 = 0{,}4a_1 + 0{,}7b_1 = 0{,}791 \qquad \text{etc.}$$

Man kann die Folgen auch mit Excel tabellieren und darstellen:

n	0	1	2	3	4	5
a_n	0,7	0,63	0,609	0,6027	0,60081	0,600243
b_n	0,7	0,77	0,791	0,7973	0,79919	0,799757
ar_n	0	0,21	0,273	0,2919	0,29757	0,299271
br_n	0,7	0,49	0,427	0,4081	0,40243	0,400729
aw_n	0,7	0,42	0,336	0,3108	0,30324	0,300972
bw_n	0	0,28	0,364	0,3892	0,39676	0,399028







Sowohl die Tabellen als auch die Graphen zeigen eine überraschend schnelle Konvergenz des Prozesses, so daß sich schon aus diesen Darstellungen die Antwort der in c) gestellten Frage ablesen läßt.

(2) Entwicklung einer rekursiven Darstellung:

$$\begin{matrix} a_0 = 0{,}7 \\ b_0 = 0{,}7 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}7b_n \end{matrix}$$

Diskussion der Vor- und Nachteile einer solchen rekursiven Darstellung.

(3) Herleitung einer expliziten Darstellung:

Es ist: $a_0 + b_0 = a_1 + b_1 = \ldots = a_n + b_n = c$ (konstant)

Folglich können beide Formeln wie folgt weiter entwickelt werden:

$a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}3b_n = 0{,}6a_n + 0{,}3(c - a_n) = 0{,}3a_n + 0{,}3c$
$b_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}7b_n = 0{,}4(c - b_n) + 0{,}7b_n = 0{,}3b_n + 0{,}4c$

Beide Gleichungen haben die Form: $x_{n+1} = Ax_n + B;\ x_0 = C;\ A,B,C \in \mathbb{R}$.

Diese rekursive Darstellung läßt sich umformen in folgende explizite:

$$x_n = \begin{cases} C + nB & \text{für } A = 1 \\ A^nC + B\dfrac{1-A^n}{1-A} & \text{für } A \neq 1 \end{cases}$$

Ist $|A| < 1$, so hat man den Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{B}{1-A}$ und mit ihm eine Antwort auf die in c) gestellte Frage. In einem Grundkurs wird man das nicht in der hier dargestellten Allgemeinheit rechnen.

(4) Die Matrix-Vektor-Interpretation:

Die rekursive Darstellung: $\begin{matrix} a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}7b_n \end{matrix}$ legt folgende Matrix-Vektor-Schreibweise nahe: $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ oder allgemeiner: $\vec{x}_{n+1} = A \cdot \vec{x}_n$. Die

Definition der Multiplikation „Matrix mal Vektor gleich Vektor“ ist dabei direkt vorgegeben. Aus dieser rekursiven Darstellung ist – mit Motivation und Definition des Matrizenprodukts – folgende explizite Form herzuleiten und inhaltlich zu interpretieren:. $\vec{x}_n = A^n \cdot \vec{x}_0$ Sowohl die Vektoren $\vec{x}_n$ als auch die Matrizenpotenzen A^n konvergieren sehr schnell und liefern ebenfalls Aufschluß über die langfristige Entwicklung.

(5) Fixvektoren stochastischer (2/2) - Matrizen:

Die Matrix A in (4) hat die allgemeine Form: $A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{0 \leq p, q \leq 1}$.

Man nennt sie stochastische (2/2)-Matrix. Für solche Matrizen kann man eine in sich geschlossene Theorie der Fixvektoren aufstellen, die ich hier nicht darstellen möchte (siehe dazu: B. v. Pape).

Der Begriff „Fixvektor“ kann auch aus der Aufgabe c) hergeleitet werden: Gibt es eine stationäre Verteilung (einen stationären Zustand), den man wie folgt definieren kann: Ein Vektor $\vec{x}$ heißt Fixvektor der Matrix $A \Leftrightarrow \vec{x} = A \cdot \vec{x}$.

Die Bestimmung eines solchen Vektors führt mit der Matrix A aus (4) zu dem LGS:

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{und}\; x_1 + x_2 = c \end{array}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0{,}6x_1 + 0{,}3x_2 \\ x_2 & = & 0{,}4x_1 + 0{,}7x_2 \\ x_1 + x_2 & = & c \end{array}}$$

Als Lösung erhält man den Vektor, dessen Komponenten schon in (3) als Grenzwerte berechnet worden sind.

Zusammenfassung:

In einem Grundkurs sind die Punkte (1), (2), (4): Berechnung von mit $\vec{x}_n$ dem rekursiven Ansatz und (5): Definition und Berechnung eines Fixvektors, minimale Voraussetzung für ein sinnvolles Weiterarbeiten. Sie sind auch zu leisten.

In einem Leistungskurs wird man nicht auf den Punkt (3) verzichten, wenn man im Laufe der Unterrichtsreihe den Begriff der Markow-Kette als einen speziellen Typ eines stochastischen Prozesses definieren und die Hauptsätze über reguläre und absorbierende Markow-Ketten herleiten und beweisen möchte.

Ein stochastischer Prozeß: Das Sommerwetter in Petershagen.

Das Problem: Das Sommerwetter in Petershagen zeigt stets genau eine von zwei möglichen Ausprägungen. Entweder ist ein Sommertag im wesentlichen (T)rocken oder er ist im wesentlichen (N)aß. Langfristige Beobachtungen des örtlichen Meteorologen haben ergeben, daß auf einen nassen Tag zu 60% Wahrscheinlichkeit wieder ein nasser Tag folgt, also zu 40% ein trockener Tag. Auf einen trockenen Tag folgt zu 70% Wahrscheinlichkeit wieder ein trockener, also zu 30% ein nasser Tag.

Die in dieser Problembeschreibung steckenden Voraussetzungen über Kenntnisse des Begriffs Wahrscheinlichkeit stellten kein Problem dar, sie sind schnell zu klären.

Das Petershäger Sommerwetter kann veranschaulicht werden durch einen Graph:

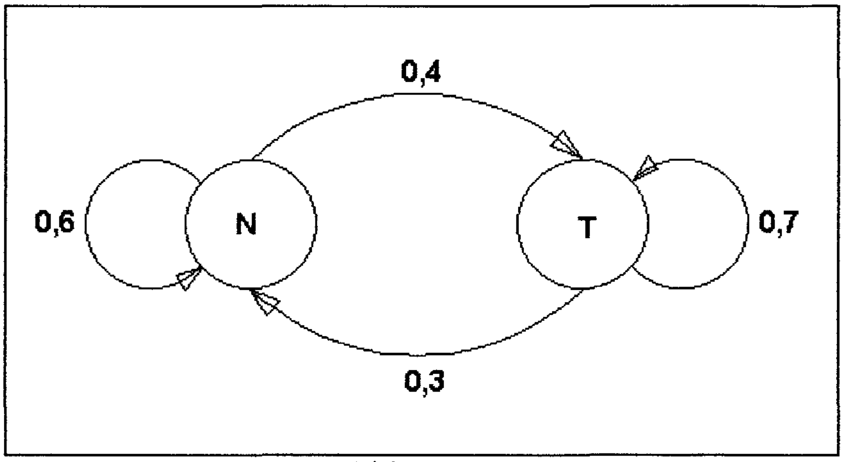


Abb. 1

Dieser zeigt die beiden möglichen „Zustände“ N bzw. T, in denen sich der Prozeß jeweils befindet (unterstellt wird hier ein diskreter Zeitparameter: von Tag zu Tag). Ferner stellen Pfeile die sogenannten „Übergangswahrscheinlichkeiten“ dar, die man wie folgt formal benennen kann: $p_{NN} = 0,6$; $p_{NT} = 0,4$; $p_{TT} = 0,7$; $p_{TN} = 0,3$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten genügen den folgenden Bedingungen:

$$(1)\ 0 \leq p_{ik} \leq 1 \quad \text{für alle } i,k$$

$$(2)\ \sum_k p_{ik} = 1 \quad \text{für alle } i,k$$

Nicht abzulesen im Graph sind noch zwei Wahrscheinlichkeiten, die hier von Bedeutung sind. Greift man einen beliebigen Sommertag heraus, so wird er sich (in der Vergangenheit oder in der Zukunft) als ein trockener oder ein nasser Tag erweisen. Die Wahrscheinlichkeiten hierfür seien mit t bzw. n bezeichnet. Auch für t und n gilt:

$$(1)\ 0 \leq t,n \leq 1 \quad \text{und} \quad (2)\ t + n = 1$$

Die Entwicklung der Theorie kann nun durch Ableitung verschiedener Teilaufgaben aus der Problembeschreibung erfolgen.

Erste Aufgabe: Heute ist ein trockener Tag. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es auch übermorgen trocken ist?

Sicher nicht ohne direkte Unterweisung wird man das Folgende vereinbaren: Der Prozeß wird vollständig gekennzeichnet:

1. durch eine „Übergangsmatrix": $A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} N & T \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} N \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array}$ oder kürzer $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

2. durch eine „Anfangsverteilung": $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} n_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$

Hinter dieser formalen Schreibweise stehen folgende Vereinbarungen: „Heute" wird durch den Index 0, „morgen" also durch den Index 1 etc. beschrieben. t_0 steht für die Wahrscheinlichkeit, daß es heute trocken ist etc. Man hat nun zu klären, daß $t_0 = 1$ und $n_0 = 0$ gesetzt werden muß, um der Anfangsbedingung der Aufgabe zu entsprechen, also $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit Hilfe schon bekannter Methoden wird berechnet:

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \\ 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}61 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die erste Aufgabe schon gelöst. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $t_2 = 0{,}61$ ist in zwei Tagen trockenes Wetter, wenn auch heute ein trockener Tag ist.

Wichtiger als diese Lösung ist folgende Analyse. Für die Wahrscheinlichkeiten n_2 und t_2 ergeben sich aus diesem Ansatz die Gleichungen:

$$n_2 = p_{NN} n_1 + p_{TN} t_1$$
$$t_2 = p_{NN} n_1 + p_{TT} t_1$$

Das ist die **1. Mittelwertsregel**. Sie lautet allgemein in der Fassung von A. Engel: *Die Wahrscheinlichkeit eines ... Zustands ist gleich dem gewichteten Mittel seiner Nachbarn.* (Engel 1987, S. 66 – Diese Regel ist auch für einen Randzustand richtig). Diese Mittelwertsregel impliziert auch die beiden Pfadregeln.

In einem Grundkurs kann man sich mit dieser Herleitung zufrieden geben. Eine geeignete Vertiefung für einen Leistungskurs wird als Theorie der harmonischen Funktionen dargestellt in dem schon erwähnten Aufsatz von Peter G. Doyle / J. Laurie Snell.

Die Weiterführung der Rechnung oben führt zu einer zweiten Frage:

Zweite Aufgabe: Wie sind trockene und nasse Tage verteilt?

Die Antwort läßt sich mit einer Grenzwertbetrachtung finden. In einem Grundkurs neigt man eher zur Methode der Berechnung eines Fixvektors. Zur Matrix A passend muß ein Vektor $\vec{x}$ definiert werden, der die Verteilung der nassen und trockenen Tage beinhaltet. Der Ansatz $\vec{x} = A \cdot \vec{x}$ lautet hier konkret:

$$\begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 0{,}6n + 0{,}3t & = & n \\ \mathrm{II} & 0{,}4n + 0{,}7t & = & t \\ \mathrm{III} & n + t & = & 1 \end{array}$$

Die Gleichungen I und II sind äquivalent zur Gleichung $0{,}4n - 0{,}3t = 0$. Zusammen mit Gleichung III folgt daraus: $n = 3/7$ und $t = 4/7$. Im Petershäger Sommer hat man also mit 3 von 7 nassen und 4 von 7 trockenen Tagen zu rechnen.

Die 2. Mittelwertsregel kann hergeleitet werden durch folgende

Dritte Aufgabe: Heute ist ein trockener Tag. Wie viele Tage „im Mittel" wird es trocken bleiben?

Auch zur Herleitung der 2. Mittelwertsregel findet man bei Peter G. Doyle / J. Laurie Snell einen Weg, der sich für einen Leistungskurs eignet. Für den Grundkurs scheint mir folgender Zugang möglich.

Hinter dem „Sommerwetter in Petershagen" steht ein stochastischer Prozeß, der auf einem etwas höheren Niveau (LK) als reguläre Markow-Kette gekennzeichnet wird. Der Graph in der Abb. 1 ist typisch für einen solchen Prozeß. Die 2. Mittelwertsregel läßt sich besser aus einem anderen stochastischen Prozeß ableiten, nämlich aus einer absorbierenden Markow-Kette. Hierunter versteht man einen Prozeß, bei dem es mindestens einen sogenannten absorbierenden Zustand gibt, einen Zustand also, in dem der Prozeß stoppt. Auch zu solchen Prozessen gibt es einen typischen Graph, mit dem man sich zunächst beschäftigen muß:

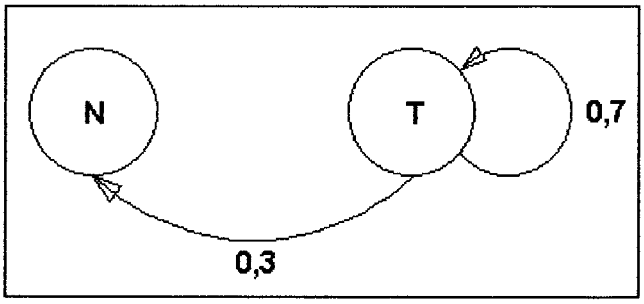


Abb. 2

Er entsteht aus der Abb. 1, wenn man die von N ausgehenden Pfeile für die Übergangswahrscheinlichkeiten wegläßt.

Für die Lösung des Problems sei vereinbart: m_Z bezeichne die „mittlere Wartezeit", die es dauert, um von einem Zustand Z in den ausweglosen Zustand zu gelangen. In diesem Beispiel geht es um die Wartezeiten m_T und m_N. Folgendes ist leicht einzusehen: die **2. Mittelwertsregel:**

$$\begin{aligned} m_N &= 0 \\ m_T &= 1 + 0{,}7m_T + 0{,}3m_N \end{aligned}$$

Von N aus habe ich keine Wartezeit. Von T aus muß ich genau einen Schritt ausführen. Mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 gelange ich wieder zu T und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 zu N. Von hier aus habe ich die Wartezeiten m_T bzw. m_N.

A. Engel formuliert hier: *Der Erwartungswert eines inneren Zustands = 1 + gewichtetes Mittel der Erwartungswerte seiner Nachbarn*, der Erwartungswert eines Randzustands ist null. (Engel 1987, S. 67)

Das Berechnen der mittleren Wartezeit mit diesem Ansatz ist hier sehr einfach. Es ist $0{,}3m_T = 1$, also $m_T = 10/3 \approx 3$. In Petershagen dauert eine Trockenperiode im Sommer also im Mittel 3 Tage.

Wegen der Einfachheit dieser Lösung neigt man dazu, dieser zu mißtrauen. In einer letzten Aufgabe soll deshalb gezeigt werden, daß man auch mit der „klassischen Methode“ der Berechnung des Erwartungswerts einer Zufallsvariablen zum gleichen Ergebnis gelangt.

Vierte Aufgabe: Berechnung der Wartezeit nach dem „klassischen“ Ansatz.

Die Länge X der Wartezeit, um von einem trockenen Tag zu dem ersten nassen Tag zu gelangen, ist eine vom Zufall gesteuerte Größe, also eine Zufallsvariable. Für eine solche Zufallsvariable stellt man eine Verteilungstabelle auf. Hierzu erweist sich der Graph (Abbildung 2) als besonders hilfreich:

$X=k$	1	2	3	...	n	...
$P(X=k)$	0,3	$0{,}7 \cdot 0{,}3$	$0{,}7^2 \cdot 0{,}3$	...	$0{,}7^{n-1} \cdot 0{,}3$	...

Zunächst muß geklärt werden, ob es sich tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt. Dazu ist zu zeigen, daß folgendes gilt:

$$(1)\ 0 \le P(X=k) \le 1 \text{ für alle } k$$

$$(2)\ \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1$$

Das gelingt, wenn schon im ersten Teil der Unterrichtsreihe das Rechnen mit geometrischen Reihen gelehrt oder wiederholt worden ist.

Die Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$ nach seiner bekannten, hier aber wegen der abzählbar unendlichen Mächtigkeit des Ereignisraums etwas weniger einfachen Definition:

$$E(X) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(X=k)$$

stellt noch höhere Anforderungen:

Mit Hilfe der s'-Formel:

Wenn $\quad s = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \dfrac{1}{1-q}$

dann $\quad s' = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots = \dfrac{1}{(1-q)^2}$

gelingt auch der Nachweis $E(X) = 10/3$.

Zusammenfassung

Mit der so weit dargestellten Unterrichtsreihe ist das Thema: Stochastische Prozesse keineswegs erschöpft. Aber selbst, wenn man nicht weiter kommt, ist schon viel erreicht: Inhaltlich bewegt man sich an den Nahtstellen von Stochastik, Analysis und Linearer Algebra. Zentrale Begriffe der Analysis (Grenzwert) werden wiederholt und vertieft. Wichtige Begriffe und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) werden in einem neuen Zusammenhang genutzt. Aus der Sicht der praktischen Anwendung ergeben sich Verbindungen zu Inhalten des Oberstufenunterrichts aus anderen Bereichen (Sozialwissenschaft, Biologie, Physik etc.).

Für den interessierten Leser wird es am hilfreichsten sein, wenn er die Zielrichtungen, die solche Unterrichtsreihen entwickeln können, kennenlernt anhand von Abituraufgaben, die von der Fachaufsicht genehmigt worden sind. Es handelt sich dabei um zwei Aufgaben für den Leistungskurs (1994) und eine Aufgabe für den Grundkurs (1998) (siehe die folgenden drei Seiten).

Literatur

Doyle, Peter G. / Snell, J. Laurie: Random Walks and Elektric Networks, 1984

Engel, Arthur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Band 2, Klett Studienbücher 1976

Engel, Arthur: Stochastik, Klett Studienbücher 1987

Himmeröder, Hans-Jörg: Lehrerfortbildung in NRW / Gymnasiale Oberstufe / Mathematik Heft 1.1-1.5 / Soest 1986

Pape, B. von: NIL – Bericht 51, Hildesheim 1993

Peter Beinke
Hafenstr. 17
32469 Petershagen

Aufgabe 1: Abitur 1994 Leistungskurs

(I) Man betrachte die homogene (1) und die inhomogene (2) Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung: (1) $y' = g(x)y$ und (2) $y' = g(x)y + h(x)$.

a) Leiten Sie für (1) die Lösung allgemein her und zeigen Sie, daß $y = \frac{1}{1+x^2}$ Lösung einer DGL der Form (1) ist.

b) Zeigen Sie, daß eine Funktion der Form: $y = C(x)e^{-G(x)}$ Lösung von (2) ist, wenn $C(x)$ und $G(x)$ den Bedingungen $C'(x) = h(x)e^{-G(x)}$ und $G'(x) = g(x)$ genügen. Bestimmen Sie eine Lösung der DGL: $y' = \frac{2x}{1+x^2}y + \frac{3x^2}{1+x^2}$.

(II) Man beobachte von einem Zeitpunkt $t = 0$ an eine Komponente (Glühbirne, Sicherung etc.). Ihre „Lebensdauer" T kann jeden Wert $t \geq 0$ annehmen. Es sei $q(t) = P(T > t)$, d. h. $q(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Komponente den Zeitpunkt t überlebt. Es entspricht gut der Realität anzunehmen, daß die Geschwindigkeit $q'(t)$, mit der die Lebensdauer der Komponente im Laufe der Zeit abnimmt, proportional zur bereits überlebten Zeit ist, daß also $q'(t) = - \lambda q(t)$ mit $\lambda > 0$ gilt.

a) Bestimmen Sie die normierte Lösung dieser DGL. Welcher wahrscheinlichkeitstheoretische Bedeutung hat hier die Normierung? (zur Kontrolle: $q(t) = e^{-\lambda t}$)

b) Eine Glühbirne überlebe 100 Stunden mit einer Wahrscheinlichkeit $q(100) = 0{,}9$.
   b.1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie 200 Stunden überlebt?
   b.2) Wie viele Stunden überlebt sie mit 95%iger Sicherheit?

c) Man kann zeigen, daß durch $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^k q(t)dt$ die mittlere Lebensdauer $E(T)$ der Komponente definiert wird.

c.1) Weisen Sie nach, daß dann $E(T) = 1/\lambda$ ist.
   c.2) Welche mittlere Lebensdauer hat damit die Glühbirne aus (IIb)?

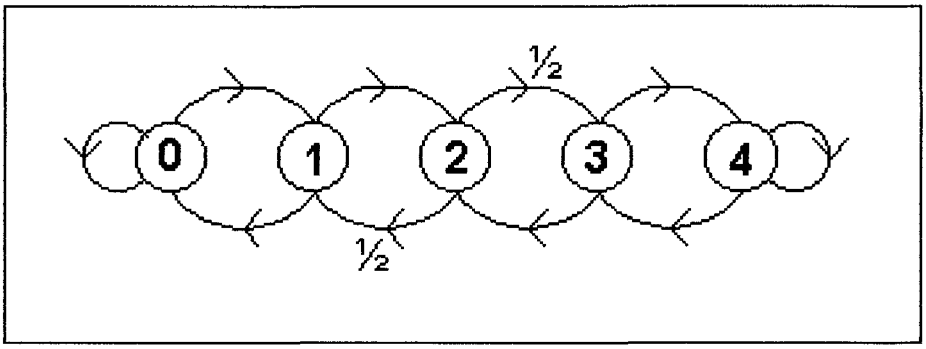
d) d.1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Komponente mit der Überlebensfunktion $q(t) = e^{-\lambda t}$ den Erwartungswert ihrer Lebensdauer übertrifft?
   d.2) Zeigen Sie, daß für die „Halbwertzeit t_h" einer Komponente folgendes gilt: $t_h = \ln(2)E(T)$.

In dieser Aufgabe wird sichtbar, daß man beide Themengebiete Analysis und Stochastik recht gut miteinander verbinden kann. Selbst zur Linearen Algebra wäre eine interessante Verbindung möglich gewesen. Bekanntlich bildet die Lösungsgesamtheit der DGL (1) einen eindimensionalen Vektorraum.

Die folgende Aufgabe wurde dem gleichen Kurs gestellt. Sie zeigt, daß die Stochastik über Markow-Ketten erschlossen worden ist.

Aufgabe 2: Abitur 1994 Leistungskurs

A man walks along a 4-block stretch of Madison Avenue. He starts at corner x and, with probability ½, walks one block to the right and, with probability ½, walks one block to the left; when he comes to the next corner he again randomly chooses his direction along Madison Avenue. He continues until he reaches corner 4, which is home, or corner 0, which is bar. If he reaches either home or bar, he stays there. The problem you pose is to find the probability $p(x)$ that the man, starting at corner x, will reach home before reaching bar (P.G. Doyle and J.L. Snell).



a) Begründen Sie, daß die im Aufgabentext definierte harmonische Funktion $x \to p(x)$ mit $x \in \{0,1,2,3,4\}$ folgende Eigenschaften hat:
(1) $p(0) = 0$ und $p(4) = 1$ und

(2) $p(x) = \dfrac{p(x-1)+p(x+1)}{2}$ für $x \in \{1,2,3\}$

Berechnen Sie $p(x)$ für $x \in \{1,2,3\}$.

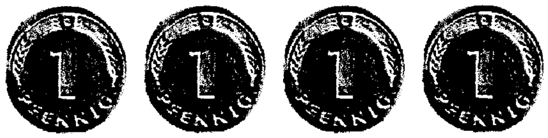
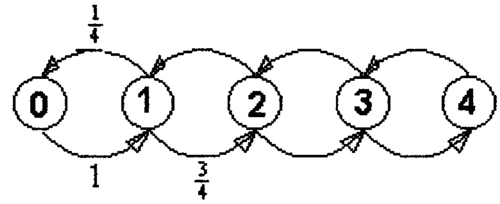
b) Die Funktion $x \to m(x)$ mit $x \in \{0,1,2,3,4\}$ definiere die mittlere Anzahl der Schritte, die der Mensch gehen muß, um von einer Ecke x der Madison Avenue nach 0 oder 4 zu gelangen. $m(x)$ hat folgende Eigenschaften:
(3) $m(0) = 0$ und $m(4) = 0$ und

(4) $m(x) = 1 + \dfrac{m(x-1)+m(x+1)}{2}$ für $x \in \{1,2,3\}$.

Beweisen Sie unter Berufung auf den Maximum-Satz für harmonische Funktionen, daß die durch (4) definierte Funktion $m(x)$ durch ihre Randwerte (3) eindeutig bestimmt ist. Berechnen Sie $m(x)$ für $x \in \{1,2,3\}$ und deuten Sie die Ergebnisse.

c) Die Zufalls-Wanderung auf der Madison-Avenue ist offensichtlich Modell einer absorbierenden Markow-Kette. Stellen Sie die Übergangsmatrix P in der kanonischen Form auf. Nennen Sie die Aussagen des Hauptsatzes für absorbierende Markow-Ketten. Berechnen Sie die Matrizen $(E - Q)^{-1}$ und $R(E - Q)^{-1}$ und deuten Sie die Werte, die diese beiden Matrizen liefern. Vergleichen Sie mit den Lösungen von a) und b).

Aufgabe 3: Abitur 1998 Grundkurs

Vier Münzen mit den Seiten Zahl und Wappen liegen ursprünglich alle mit der Seite Zahl oben (siehe Abbildung). Nun wird jede Sekunde eine der Münzen zufällig ausgewählt und umgedreht. Man beobachtet die Verteilung für die Anzahl X der oben liegenden Wappen.	
I a) Übertrage dazu den abgebildeten Graph und ergänze die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten. Erläutere die Übergänge vom Zustand 1 in die benachbarten Zustände 0 bzw. 2 genau.	

I b) Berechne mit Hilfe der Übergangsmatrix A und der Anfangsverteilung $\vec{v}_0$ die Verteilungen $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_4$. Kommentiere die Ergebnisse.

Vorgaben für A und $\vec{v}_0$: $A = \begin{array}{c|c} & 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad 4 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ &&&& \\ &&&& \\ &&&& \\ &&&& \end{pmatrix}\end{array}$ und $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

I c) Berechne den normierten Fixvektor der Matrix A und interpretiere ihn aus der Sicht des beschriebenen Zufallsprozesses, d. h. gib die Verteilung der Zufallsvariablen X an. Wie viele Wappen sieht man im Mittel?

II Mit den vier Münzen werde folgender Algorithmus durchgeführt: Wirf alle Münzen auf einmal und scheide die Münzen aus, die Wappen zeigen. Wiederhole das „Spiel" so lange, bis alle Münzen ausgeschieden sind. Zeichne einen Graphen und berechne die mittlere Wurfzahl.

Interessant an dieser Aufgabe ist, daß man mit ihr einen vermeintlichen Widerspruch zwischen Mechanik und Thermodynamik aufklären kann. Es geht um die Verteilung von Molekülen in einem geschlossenen Behälter. Die Thermodynamik sagt voraus, daß das System einem Gleichgewicht zustrebt. Nach dem Wiederkehrsatz von Poincaré jedoch kehrt ein abgeschlossenes dynamisches System unendlich oft in seinen Ausgangszustand zurück.*) Bei einer hinreichend großen Zahl von Münzen in der Aufgabe oben kann man zeigen, daß der Ausgangszustand 0 nur sehr selten eintritt und deshalb nicht beobachtet werden kann. Diese Bemerkung soll als Beispiel für den schon gegebenen Hinweis gelten, daß man sich mit der dargestellten Theorie sehr schnell in Bereiche begeben kann, die auch aus Sicht anderer in der Oberstufe unterrichteter Inhalte von Bedeutung sind.

---

*) A. Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Band 2, Seite 187 ff