Beispiele von Klausur- und Prüfungsaufgaben aus einem Grundkurs Stochastik

Heinz Klaus Strick, Leverkusen

Die nachfolgend abgedruckten Aufgaben wurden als Klausuraufgaben in einem Grundkurs Stochastik der Stufe 13 gestellt bzw. im Rahmen der mündlichen Abiturprüfungen einzelnen Schülerinnen und Schülern vorgelegt. Der Grundkurs wurde zu Beginn der Stufe 13 neu gebildet (wegen Erkrankung eines Fachlehrers mussten Grundkurse umverteilt werden). Daher bestand die Notwendigkeit, die teilweise unterschiedlichen Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler aus dem 2. Halbjahr der Stufe 12 anzugleichen. In Stufe 13 standen insgesamt 40 Stunden für den Unterricht im Bereich Stochastik zur Verfügung; die übrigen Unterrichtsstunden wurden für die Behandlung von Themen aus der Analysis benötigt.

Als Lehrbuch wurde benutzt:

- Griesel, H. / Postel, H. (Hg.): Grundkurs Stochastik, Schroedel Verlag, Hannover

Darüber hinaus wurde auch einzelne Aufgaben behandelt, die abgedruckt sind in:

- Strick, H. K.: Einführung in die Beurteilende Statistik, Schroedel Verlag, Hannover

Die Schülerinnen und Schüler hatten in Stufe 12 folgende Themen behandelt: Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit, Pfadregeln, Kombinatorik, Zufallsgrößen und Erwartungswert, Einführung Binomialverteilung.

In meinem Grundkurs der Stufe 13 folgten dann: Vierfeldertafeln und Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Warten auf Erfolg, Binomialverteilung, Kugel-Fächer-Modell (Rosinenproblem), Testen von Hypothesen bei kleinem n (zweiseitiger Test), Streuung um den Erwartungswert, σ-Regeln, Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe – Testen von Hypothesen bei großem Stichprobenumfang, Einseitige Hypothesentests.

Anhand der nachfolgenden Klausuraufgaben wird deutlich, welche Themen im Einzelnen im Unterricht behandelt wurden und auf welche Weise die Vorbereitung auf die Abiturprüfung erfolgte.

1. Aufgabenstellung der 1. Klausur in Stufe 13

Aufgabe 1

Wird der Lehrerberuf zunehmend ein Frauen-Beruf?

64,8% aller Studierenden des Lehramts sind Frauen; bei den übrigen Studiengängen beträgt der Anteil von Frauen nur 38,6%. Insgesamt geben 11,7% der an den Hochschulen Deutschlands eingeschriebenen Studentinnen und Studenten als Studienziel den Lehrerberuf an.

a) Untersuche die in der Zeitungsmeldung enthaltenen Informationen. Welche Daten kann man dem umgekehrten Baumdiagramm entnehmen? Schreiben Sie einen geeigneten Text über diese Daten.

b) Eine an einer Hochschule eingeschriebene Person wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person
   (1) eine Frau ist,
   (2) eine Frau ist, die Studierende des Lehramt ist,
   (3) eine Frau ist, wenn bekannt ist, dass diese Person nicht Studierende des Lehramts ist,
   (4) ein anderes Ziel als den Lehrerberuf hat, wenn bekannt ist, dass diese Person ein Mann ist?

Aufgabe 2

Jemand will beim Roulettespiel nur auf das „erste Dutzend" setzen (d.h. ein Gewinn wird ausgezahlt, wenn die Kugel auf einem der Felder 1, 2, 3, ..., 12 liegen bleibt). Wie viele Spielrunden muss der Betreffende mindestens mitspielen, damit er/sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens einmal gewinnt?

Aufgabe 3

a) Eine Münze wird 4mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   (1) (genau) 2mal Wappen fällt,
   (2) mindestens 2mal Wappen fällt?

b) Vier Münzen werden 5mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   (1) mehr als 3mal (genau) 2 Wappen fallen,
   (2) höchstens 2mal mindestens 2 Wappen fallen?

Aufgabe 4

Ein Würfel wird 100mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(1) mehr als 15mal Augenzahl 6 auftritt,
(2) weniger als 45mal eine ungerade Augenzahl fällt,
(3) genau 67mal eine Augenzahl größer 2 fällt,
(4) mindestens 85mal eine Augenzahl größer 1 auftritt.

Aufgabe 5

Sammelbilder werden zufällig und gleich-häufig auf Kaugummi-Packungen verteilt; zu einer Serie gehören 40 Bilder.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem Kauf von 100 Kaugummi-Packungen
   (1) das Bild Nr. 15 noch nicht hat,
   (2) das Bild Nr. 24 bereits 2mal hat,
   (3) das Bild Nr. 40 mehr als 4mal hat?
b) Geben Sie einen Schätzwert dafür an, wie viele Bilder der Serie von 40 Bildern nach dem Kauf von 100 Packungen 0mal, 1mal, 2mal, 3mal, 4mal, mehr als 4mal vorhanden sind.

2. Aufgabenstellung der 2. Klausur in Stufe 13

Aufgabe 1

a) Ein reguläres Tetraeder mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4 wird 100mal geworfen.
   Schätzen Sie, wie oft Augenzahl 1 fallen wird. Bestimmen Sie dazu – mit Hilfe der Tabelle der kumulierten Binomialverteilung – ein Intervall, in dem das Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von
   (1) 50%, (2) 75%, (3) 90% liegt.
b) Bei welchen Ergebnissen würde man das Tetraeder für manipuliert halten? Geben Sie hierzu eine 'Regel' an.
c) Das Tetraeder wird n-mal geworfen, n = 200, 400, 800, 1600.
   (1) Bestimmen Sie jeweils (mit Hilfe der σ-Regeln) 90%-Umgebungen für den Erwartungswert.
   (2) Was beobachten Sie hinsichtlich der Größe der 90%-Umgebungen?
   (3) Wie vereinbart sich Ihre Beobachtung mit dem Empirischen Gesetz der Großen Zahlen, nämlich dass sich mit zunehmendem Stichprobenumfang die relativen Häufigkeiten dem Wert der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeit 'nähern'.

Aufgabe 2

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Mittwochslotto (2 Ziehungen '6 aus 49') eine oder mehrere Zahlen in beiden Ziehungen gezogen werden, beträgt 56,4%.
[Zusatzfrage: Warum ist das so?]
Machen Sie eine Prognose, wie oft dies bei den nächsten 500 Ausspielungen des Mittwochslottos vorkommen wird.

Aufgabe 3

Marktforscher X. behauptet, dass in 48% der Haushalte ein CD-Player vorhanden ist; andere Marktforscher bezweifeln diese Angabe. Bei einer Stichprobe des Statistischen Bundesamtes (Mikrozensus) in 374 Haushalten wird u.a. auch nach der Ausstattung des Haushalts gefragt.

a) Bei welchen Stichprobenergebnissen würde man die Angaben des Marktforschers X. für falsch ansehen? Geben Sie eine Entscheidungsregel auf dem 90%-Niveau an!
b) Was sind hier Fehler 1. und 2. Art? (allgemeine und konkrete Bedeutung)
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art? Was besagt diese Angabe?
d) Angenommen, der Ausstattungsanteil der Haushalte beträgt tatsächlich nur 44%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art? Was besagt diese Angabe?

Aufgabe 4

Von einem Arzneimittel behauptet der Hersteller A., dass es in 80% der Fälle dem Patienten hilft; die Konkurrenz B. ist der Ansicht, dass durch dieses Medikament nur in 70% der Fälle eine Heilung erfolgt. Um den Streit zu entscheiden, will man 100 Patienten zufällig auswählen und zugunsten von A. entscheiden, wenn mehr als 75 Patienten geheilt werden, andernfalls soll die Meinung von B. gelten.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 75 Patienten geheilt werden, obwohl B. Recht hat?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 75 Patienten geheilt werden, obwohl A. Recht hat?
c) Was haben a), b) mit Fehlern 1./2. Art zu tun?

3. Aufgabenstellung der Stochastikaufgabe der 3. Klausur (Vorabiturklausur)

Bei einem Schulfest der Unterstufe kann man bei einem Wettspiel mit weißen Mäusen mitmachen. Eine Maus wird in der Mitte eines symmetrischen Spielfeldes ('Platz') ausgesetzt und dort gefüttert; wenn sie ihr Futter gefressen hat, verlässt sie den Platz und versteckt sich in einem der angrenzenden (Spiel-)Häuser. Die gleichartigen Häuser sind von 1 bis 10 nummeriert; die Mitspieler können auf die Hausnummern setzen. Das Spiel beginnt, wenn für jedes der Häuser ein Einsatz vorhanden ist. Die Häuser sind gleich groß. Es werden verschiedene Mäuse eingesetzt; für jede Runde wird eine von 8 Mäusen zufällig ausgewählt.

a) (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 4 aufeinander folgenden Spielrunden 4 verschiedene Mäuse ausgewählt werden?
(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Maus in 10 Spielrunden keinmal, einmal, zweimal, mehr als zweimal eingesetzt wird?
(3) Schätzen Sie, wie viele der Mäuse in den 10 Runden keinmal, einmal, zweimal, mehr als zweimal eingesetzt werden.
(4) Wie viele Runden müssen mindestens gespielt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Maus mindestens einmal eingesetzt wird, mindestens 90% beträgt?

b) (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei diesem Spiel in 100 Runden mehr als 10mal mit Haus Nr. 1 gewinnt?
(2) Die Behauptung des Spielbetreibers, dass es egal ist, auf welches der Häuser man setzt, soll durch Beobachtung von 250 Runden überprüft werden. Welche Ergebnisse würde man als verträglich mit der Behauptung des Spielbetreibers ansehen? (90%-Niveau)
(3) Was sind hier Fehler 1. und 2. Art?
(4) Man vermutet, dass das Haus Nr. 5 (ein rot angemaltes Haus) bei den Mäusen beliebter ist als die anderen. Wie würde die Entscheidungsregel in (2) lauten, wenn die Hypothese $p > 0{,}1$ überprüft werden soll? (90%-Niveau)

c) Jeder Teilnehmer des Schulfestes erhält bei Kauf der Eintrittskarte ein Freilos für das 'Mäusespiel', für jedes zusätzliche Spiel muss bezahlt werden. In einem Bericht in der Schülerzeitung war später zu lesen:

> **Mäuse waren der Renner**
> Das diesjährige Unterstufen-Schulfest der LLS war wieder ein voller Erfolg; besonderen Zuspruch verzeichnete das 'Mäusespiel' der Klasse 5a. Keiner der Teilnehmer ließ es sich nehmen, wenigstens einmal mitzuspielen. Geraten werden musste, in welchem von 10 Häusern sich eine Maus verstecken würde. Das Spiel war vor allem bei Jungen beliebt. 36% der Jungen spielten mehr als einmal mit; bei den Mädchen gaben nur 24% der Mädchen Geld für das Spiel aus. Und dies, obwohl insgesamt mehr Mädchen als Jungen am Schulfest teilnahmen! Insgesamt wurden 55% der Eintrittskarten für das Schulfest an Mädchen verkauft.

(1) Fassen Sie die im Artikel enthaltenen Daten in einem geeigneten Baumdiagramm zusammen.
(2) Schreiben Sie einen Zeitungsartikel über das umgekehrte Baumdiagramm.

4. Aufgabenstellungen der Stochastikaufgabe in der Abiturklausur

Informationen zum Unterricht

(Hinweis: Für die Abiturklausuren müssen die Fachlehrer/innen in NRW zwei Vorschläge mit je zwei Aufgaben beim Fachdezernenten bei der Bezirksregierung einreichen, von denen einer dann für die Prüfung ausgewählt wird. Der folgende Text diente zur Information des Dezernenten.)

Beide Vorschläge beginnen mit Fragestellungen, die sich auf den Unterricht in 12.2 beziehen und zu Beginn von 13.1 wiederholt wurden: Umkehren eines Baumdiagramms / Bestimmung bedingter Wahrscheinlichkeiten bzw. Berechnen von Wahrscheinlichkeiten zu hypergeometrisch-verteilten Zufallsgrößen (behandelt im Rahmen der Kombinatorik). Die Schüler/innen sind daran gewöhnt, einen Text zum umgekehrten Baumdiagramm zu schreiben (mehrere Beispiele im Unterricht).

Im Zusammenhang mit dem Binomialmodell wurden verschiedene Einkleidungen behandelt (Verteilung der Geburtstage auf das Jahr, Verteilung von Rosinen auf Rosinenbrötchen), die sich auf das Kugel-Fächer-Modell zurückführen lassen (Wahrscheinlichkeitsberechnung, Häufigkeitsinterpretation, Bestimmung der Mindestanzahl von Stufen).

Im Rahmen der Behandlung von Fragestellungen der Beurteilenden Statistik wurden mehrere Beispiele für zweiseitige bzw. einseitige Hypothesentests besprochen (einschl. konkreter Beschreibung von Fehlern 1. und 2. Art und Berechnung von Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art mit Hilfe von σ-Umgebungen).

4.1 Aufgabenstellung der Stochastikaufgabe - Vorschlag 1

Polizei warnt vor Alkohol am Steuer

In Deutschland wurden im vergangenen Jahr insgesamt ca. 390.000 Unfälle mit Personenschaden registriert, davon waren 10,2% durch Alkohol verursacht. Während sich 24,6% der Verkehrsunfälle ohne Alkoholeinfluss in der Zeit zwischen 18 Uhr abends und 4 Uhr morgens ereigneten, fiel bei den Alkohol-Unfällen ein Anteil von 68,0% in diesen Zeitraum.

a) (1) Stellen Sie die Daten des Zeitungsartikels in einer Vierfeldertafel und in einem Baumdiagramm zusammen.
(2) Welche Daten kann man dem umgekehrten Baumdiagramm entnehmen? Schreiben Sie einen Zeitungstext über diese Daten.
(3) Ein Unfall mit Personenschaden werde zufällig aus dem Jahresbericht ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Unfall
(3.1) unter Alkoholeinwirkung geschah, wenn bekannt ist, dass er zwischen 4 Uhr morgens und 18 Uhr abends stattfand,
(3.2) zwischen 4 Uhr morgens und 18 Uhr abends stattfand, wenn bekannt ist, dass kein Alkohol im Spiel war?

b) Ein Viertel der alkoholisierten Unfallbeteiligten hatte ein Alter zwischen 18 und 24 Jahren ('Jugendliche'). Für eine Untersuchung werden die Akten der 'Alkoholunfälle' herausgesucht (Zufallsauswahl).
(1) Wie viele dieser Akten müsste man mindestens durchsehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% die Akten von mindestens einem Jugendlichen darunter ist?
(2) Man sucht die Akten von 100 Alkoholunfällen mit Personenschaden aus dem Jahr heraus (Zufallsauswahl). Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mehr als 20 Unfälle, an denen Jugendliche beteiligt waren?

c) In Leverkusen ereigneten sich im letzten Jahr insgesamt 74 Unfälle, bei denen die Fahrer unter Alkoholeinwirkung standen und bei denen zum Glück nur Sachschaden entstand.
Angenommen, die Unfälle verteilten sich zufällig auf die Tage des Jahres:
(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem zufällig ausgewählten Tag des Jahres kein, ein, mehr als ein Unfall dieser Art registriert wurden?
(2) Wie viele Tage wird es danach ungefähr gegeben haben, an denen es keinen, einen, mehr als einen Unfall gegeben hat?

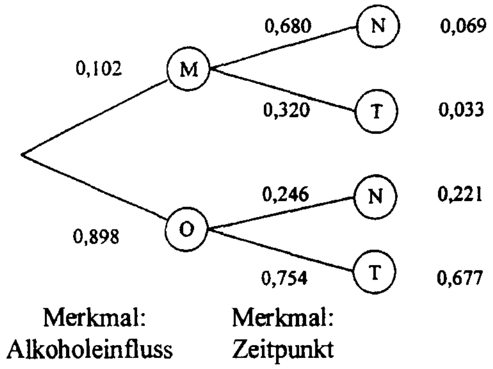
d) Bei früheren Erhebungen hatte man festgestellt, dass 45% aller Alkoholunfälle sogenannte *Fahrunfälle* sind; das sind Unfälle, die ohne Zutun anderer Verkehrsteilnehmer dadurch entstehen, dass der Fahrer die Kontrolle über das Fahrzeug verliert. Bei einer neuen Untersuchung will man 500 Alkoholunfälle untersuchen.
(1) Bei welchen Stichprobenergebnissen würde man davon ausgehen können, dass sich dieser Anteil verändert hat? (90%-Niveau)
(2) Was wären hier Fehler 1. und 2. Art?
(3) Angenommen, der Anteil der Fahrunfälle hätte sich auf 39% reduziert. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art?

Erwartete Schülerleistungen / Lösung der Aufgabe

Teilaufgabe a)

Im vorgelegten Zeitungsartikel werden die Merkmale 'Zeitpunkt des Unfalls' und 'Alkoholeinfluss' betrachtet mit den Ausprägungen 'nachts' bzw. 'tags' und 'mit' bzw. 'ohne'. Zufallsversuch: Aus der Gesamtheit der registrierten Unfälle mit Personenschaden wird zufällig ein Unfall ausgewählt.

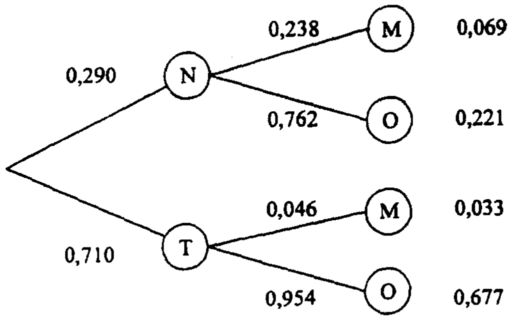
Dem Artikel sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten zu entnehmen:



In der zugehörigen Vierfeldertafel stehen die Pfadwahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms in den inneren Feldern:

		Merkmal: Alkoholeinfluss		Summe
		mit	ohne	
Merkmal	nachts	0,069	0,221	0,290
Zeitpunkt	tags	0,033	0,677	0,710
Summe		0,102	0,898	1,000

Während die Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe des ursprünglichen Baumdiagramms in den Spalten der Vierfeldertafel 'enthalten' sind, ergibt sich das umgekehrte Baumdiagramm durch Betrachtung der Zeilen der Vierfeldertafel:



Merkmal: Zeitpunkt Merkmal: Alkoholeinfluss

Dem umgekehrten Baumdiagramm können z.B. die folgenden Informationen entnommen werden:
29% aller Verkehrsunfälle mit Personenschaden ereignen sich zwischen 18 Uhr abends und 4 Uhr morgens, davon 23,8% unter Alkoholeinfluss. Bei den Unfällen, die sich in der übrigen Zeit ereignen, spielt Alkohol nur in 4,6% der Fälle eine Rolle.

Die im Aufgabenteil (3) gesuchten Wahrscheinlichkeiten können aus den beiden Baumdiagrammen abgelesen werden: (3.1) 4,6% (3.2) 75,4%

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 15 Punkte:
je 3 Punkte für die Aufstellung des 1. Baumdiagramms und der Vierfeldertafel sowie den Zeitungsartikel,
4 Punkte für das umgekehrte Baumdiagramm

Teilaufgabe b)
Zufallsversuch: 100-stufiger Bernoulli-Versuch
Erfolgswahrscheinlichkeit: $p = 0,25$
Zufallsgröße X: Anzahl der Akten von Jugendlichen

(1) P(unter n herausgegriffenen Akten sind lauter Akten von Erwachsenen) $= 0,75^n$
P(unter n Akten ist mindestens eine Akte eines Jugendlichen) $= 1 - 0,75^n$
Bedingung der Aufgabenstellung: $1 - 0,75^n \geq 0,5$
Durch Logarithmieren oder Potenzieren findet man: $n \geq 3$.

(2) Wahrscheinlichkeitsberechnung mit Hilfe des Tafelwerks (kumulierte Wahrscheinlichkeiten):
$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - 0,149 = 0,851 = 85,1\%$

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 8 Punkte: je 4 Punkte für die beiden Fragen

Teilaufgabe c)
(1) Ansatz Kugel-Fächer-Modell: 74 Kugeln werden zufällig auf 365 Fächer verteilt

74-stufiger Bernoulli-Versuch mit $p = \frac{1}{365}$

Zufallsgröße: X: Anzahl der Unfälle an einem beliebig ausgewählten Tag

$$P(X = 0) = \left(\frac{364}{365}\right)^{74} = 0,816$$

$$P(X = 1) = 74 \cdot \frac{1}{365} \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{73} = 0{,}166$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 0{,}018$$

(2) Häufigkeitsinterpretation:
Es wird ca. 298 Tage im Jahr geben ohne Unfall, 61 Tage mit 1 Unfall, 7 mit mehr als 1 Unfall (Rundungsfehler).

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 10 Punkte: 2 Punkte für den Ansatz, 5 Punkte für die Wahrscheinlichkeitsberechnungen, 3 Punkte für die Häufigkeitsinterpretation

Teilaufgabe d)
(1) Zweiseitiger Hypothesentest mit n = 500: H_0: p = 0,45
Es ist: $\mu = 22{,}5$; $\sigma = 11{,}12$; $1{,}64\sigma = 18{,}24$

Entscheidungsregel: Verwirf die Hypothese H_0, falls weniger als 207 oder mehr als 243 Fahrunfälle sind.

(2) Fehler 1. Art: Der Anteil hat sich nicht verändert, aber das Stichprobenergebnis liegt zufällig im Verwerfungsbereich: Man geht zukünftig irrtümlich von einer Veränderung des Anteils der Fahrunfälle aus.

Fehler 2. Art: Der Anteil hat sich verändert, aber das Stichprobenergebnis liegt zufällig im Annahmebereich: Man geht auch zukünftig von einem Anteil von 45% aus, obwohl dies nicht mehr stimmt.

(3) Wahrscheinlichkeitsberechnung mit Hilfe der Näherungsformeln von Moivre-Laplace:
$P_{p1=0,39}(207 \le X \le 243) \approx P_{p1=0,39}(\mu_1 - 1{,}05\sigma_1 \le X \le \mu_1 + 4{,}45\sigma_1) \approx 0{,}147$

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 17 Punkte: 5 Punkte für den Ansatz einschl. Entscheidungsregel, 4 Punkte für die Beschreibungen der Fehler, 8 Punkte für die Wahrscheinlichkeitsberechnungen.

4.2 Aufgabenstellung der Stochastikaufgabe - Vorschlag 2

a) In einem Kurs sind 12 Schülerinnen und 8 Schüler. Der Kurslehrer erhält von einem Verein regelmäßig fünf Freikarten für ein Basketballspiel, die er an die Kursteilnehmer weitergibt. Zunächst verfährt er dabei so: Die Namen von allen Schülerinnen und Schülern werden auf Zettel geschrieben. 5 Zettel werden *auf einen Griff* gezogen.
   (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mehr Freikarten an Jungen als an Mädchen verteilt?
   (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Freikarten in dieser Woche an solche Schüler/innen verteilt werden, die in der vergangenen Woche keine Freikarten erhalten hatten?

b) Statt der Zettel mit den Namen benutzt er später ein reguläres (20flächiges) Ikosaeder; die Augenzahlen entsprechen dabei der Nummer des Schülers/der Schülerin in der Kursliste.
   (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden nach diesem Verfahren mehr Freikarten an Jungen als an Mädchen verteilt?
   (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Karten an 5 verschiedene Personen verteilt?

c) Gehen wir jetzt davon aus, dass dem Lehrer n Freikarten zur Verfügung stehen. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Junge eine Freikarte erhält, mindestens 90% ist?

d) Der Kurssprecher protokolliert, wie oft die einzelnen Kursteilnehmer nach diesem Glücksverfahren eine Freikarte erhalten haben.
   (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 50 Runden (Ikosaederwürfen) ein bestimmter Kursteilnehmer noch keine Freikarte, eine Freikarte, zwei, drei, mehr als drei Freikarten erhalten hat?
   (2) Wie viele Kursteilnehmer etwa werden nach den 50 Runden noch keine, eine Freikarte, zwei, drei, mehr als drei Freikarten haben?
   (3) Nach n Runden haben drei Schüler/innen noch keine Freikarte erhalten. Schätzen Sie, wie groß n ist.

e) Die Jungen haben den Verdacht, dass der Lehrer das Ikosaeder so geschickt werfen kann, dass dadurch die Mädchen im Vorteil sind. Sie wollen ihre Vermutung während der nächsten 150 Runden überprüfen.
   (1) Bei welchen Häufigkeiten sind die Jungen wohl nur bereit, von ihrer Vermutung abzugehen? (90%-Niveau)
   (2) Beschreiben Sie, was hier Fehler 1. und 2. Art sind.
   (3) Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der Lehrer tatsächlich die Jungen bevorzugt und es schafft, mit Wahrscheinlichkeit 50% einem Jungen eine Freikarte zuzulosen?

Erwartete Schülerleistungen / Lösung der Aufgabe

Teilaufgabe a)
Zufallsversuch: Ziehen ohne Zurücklegen
Zufallsgröße X: Anzahl der Karten für Jungen

(1) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{\binom{12}{5}\binom{8}{0}}{\binom{20}{5}} - \frac{\binom{12}{4}\binom{8}{1}}{\binom{20}{5}} - \frac{\binom{12}{3}\binom{8}{2}}{\binom{20}{5}} \approx 29{,}6\%$

(2) P(andere Gewinner als letzte Woche) $= \frac{\binom{15}{5}\binom{5}{0}}{\binom{20}{5}} \approx 19{,}4\%$

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 9 Punkte: 5 Punkte für den Ansatz einschl. Wahrscheinlichkeitsberechnung in (1), 4 Punkte für Teil (2).

Teilaufgabe b)
Zufallsversuch: Ziehen mit Wiederholung (Bernoulli-Versuch mit $p = 0{,}4$)

(1) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0{,}07776 - 0{,}2592 - 0{,}3456 = 31{,}7\%$

(2) P(lauter verschiedene Personen werden ausgelost) $= \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{20\cdot20\cdot20\cdot20\cdot20} = 0{,}5814$

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 8 Punkte: Teil (1): 5 Punkte, Teil (2): 3 Punkte

Teilaufgabe c)
P(nur Mädchen erhalten eine Freikarte) $= 0{,}6^n$
P(mindestens 1 Junge erhält eine Freikarte) $= 1 - 0{,}6^n$
Bedingung: $1 - 0{,}6^n \le 0{,}1$
Lösung der Ungleichung durch Potenzieren oder Logarithmieren: $n \ge 5$

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 4 Punkte

Teilaufgabe d)
(1) Zufallsversuch: 50-stufiger Bernoulliversuch mit $p = 0{,}05$
X: Anzahl der Freikarten, die eine zufällig ausgewählte Person in 50 Runden erhält

Wahrscheinlichkeitsberechnung:	Häufigkeitsinterpretation:
$P(X = 0) = 0{,}95^n \approx 0{,}077$	ca. 1-2
$P(X = 1) = 50\cdot0{,}05\cdot0{,}95^{49} \approx 0{,}202$	ca. 4
$P(X = 2) = 1225\cdot0{,}05^2\cdot0{,}95^{48} \approx 0{,}261$	ca. 5
$P(X = 3) = 19600\cdot0{,}05^3\cdot0{,}95^{47} \approx 0{,}220$	ca. 4-5
$P(X > 3) \approx 0{,}240$	ca. 5

(3) Für welches n gilt: $20\cdot P(X = 0) = 3$, d.h. gesucht ist n mit $0{,}95^n \approx 0{,}15$. Dies gilt für $n = 3$.

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 11 Punkte: 8 Punkte für die Wahrscheinlichkeitsberechnung und Häufigkeitsinterpretation, 3 Punkte für die Schätzung von n

Teilaufgabe e)
(1) 150-stufiger Bernoulliversuch
X: Anzahl der an Jungen verlosten Freikarten
Einseitiger Hypothesentest mit H_0: $p < 0{,}4$
Standpunkt: Die Jungen lasen sich von ihrer Meinung nur abbringen, wenn im zu beobachtenden Zufallsversuch signifikante Abweichungen nach oben eintreten.

Entscheidungsregel:
Für $p = 0{,}4$ wäre: $\mu = 60$; $\sigma = 6$; $\mu + 1{,}28\sigma = 67{,}7$
Für $p < 0{,}4$ ist $\mu + 1{,}28\sigma < 67{,}7$

Für $p < 0{,}4$ ist $\mu + 1{,}28\sigma < 67{,}7$
Verwirf die Hypothese H_0, falls mehr als 67mal Jungen ausgelost werden.

(2) Fehler 1. Art: Der Lehrer benachteiligt die Jungen, aber da das Stichprobenergebnis zufällig im Verwerfungsbereich der Hypothese liegt, hat man keine Begründung, ihm dies vorzuwerfen.

Fehler 2. Art: Der Lehrer benachteiligt die Jungen nicht, aber das Stichprobenergebnis im Annahmebereich überzeugt die Jungen nicht.

(3) Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art:
$P_{p1=0,5}(X \leq 67) = P_{p1=0,5}(X \leq \mu_1 - 1{,}22\sigma_1) \approx 11{,}1\%$

Bewertung der Schülerleistungen:
maximal erreichbar insgesamt 18 Punkte: 2 Punkte für den Ansatz, 6 Punkte für die Bestimmung der Entscheidungsregel, 4 Punkte für die Beschreibungen der Fehler, 6 Punkte für die Wahrscheinlichkeitsberechnung des Fehlers 2. Art.

5. Aufgabe für die mündliche Abiturprüfung (4. Abiturfach)

a) In einem Buch mit 200 Seiten sind 100 Druckfehler – zufällig über die Seiten des Buches verteilt.
   (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man auf einer bestimmten Seite keinen, einen, zwei, mehr als zwei Druckfehler?
   (2) Wie viele Seiten wird es im Buch geben, auf denen 0, 1, 2, mehr als 2 Druckfehler sind?

b) Um Druckfehler zu vermeiden, lesen zwei Lektoren den Buchtext nacheinander, aber unabhängig voneinander durch. Erfahrungsgemäß findet Lektor A einen Druckfehler mit Wahrscheinlichkeit 60% (d.h. 60% aller Druckfehler); von diesen Fehlern werden 75% auch von Lektor B entdeckt. Von den Fehlern, die Lektor A übersehen hat, findet der Lektor B 70%.
   (1) Wie viele Fehler werden weder von A noch von B entdeckt?
   (2) Wie groß sind diese Prozentsätze, wenn B und A in umgekehrter Reihenfolge lesen?
   Hinweis: Stelle die Information in einem Baumdiagramm und einer Vierfeldertafel dar!

c) In einem anderen Text sind 250 Druckfehler.
   (1) Geben Sie eine Schätzung (auf dem 95%-Niveau) an, wie viele Fehler Lektor A finden wird.
   (2) Bei welchen Anzahlen würde man behaupten können, dass sich die Fähigkeit von Lektor A verändert hat?
   (3) Was wären hier Fehler 1. und 2. Art?

Erwartete Schülerleistungen / Lösung der Aufgabe

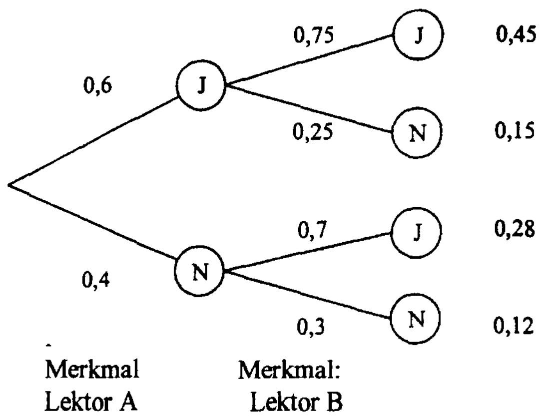
a) (1) Zufallsgröße X: Anzahl der Fehler auf einer zufällig ausgesuchten Seite
Kugel-Fächer-Modell: 100 Kugeln werden zufällig auf 200 Fächer verteilt

100-stufiger Bernoulli-Versuch mit $p = \frac{1}{200}$

$P(X = 0) = 0{,}606$; $P(X = 1) = 0{,}304$; $P(X = 2) = 0{,}076$; $P(X > 2) = 1 - (0{,}606 + 0{,}304 + 0{,}076) = 0{,}014$

(2) Häufigkeitsinterpretation: Die Wahrscheinlichkeitsberechnungen gelten für jede der 200 Seiten, d.h. 60,6% der Seiten enthalten 0 Druckfehler (das sind ca. 121 Seiten), 30,4% der Seiten enthalten einen Druckfehler (das sind ca. 61 Seiten), 7,6% der Seiten enthalten 2 Druckfehler (das sind ca. 15 Seiten) und 1,4% der Seiten enthalten mehr als 2 Druckfehler (das sind ca. 3 Seiten).

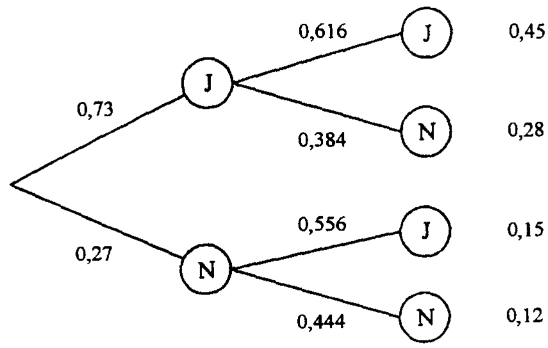
b) Darstellung der Informationen in einem Baumdiagramm und einer Vierfeldertafel: Abkürzung „Lektor A" steht für das Merkmal „Lektor A findet einen Fehler" usw.:



	Merkmal: Lektor B		Summe
	ja	nein	
Merkmal ja	45%	15%	60%
Lektor A nein	28%	12%	40%
Summe	73%	27%	100%

Umgekehrtes Baumdiagramm:

73% der Fehler werden von Lektor B entdeckt, von diesen Fehlern werden 61,6% auch von Lektor A gefunden. Von den Fehlern, die B nicht entdeckt, werden 55,6% von A gefunden.



Merkmal: Lektor B   Merkmal: Lektor A

(3) Bernoulli-Versuch mit $n = 250$; $p = 0{,}6$, also $\mu = 150$; $\sigma = 7{,}75$; $1{,}96\sigma = 15{,}2$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% wird die Anzahl der Fehler, die Lektor A findet, zwischen 135 und 165 einschl. liegen. Falls die Anzahl außerhalb dieses Intervalls liegt, wird man behaupten können, dass sich die Fähigkeit von Lektor A verändert hat.

Fehler 1. Art: Die Fähigkeit von Lektor A hat sich nicht verändert; das Ergebnis der Stichprobe liegt zufällig außerhalb des o.a. Intervalls: Man geht von einer Veränderung aus, die gar nicht stattgefunden hat.

Fehler 2. Art: Die Fähigkeit von Lektor A hat sich verändert; das Stichprobenergebnis liegt zufällig innerhalb des o.a. Intervalls. Die Veränderung wird nicht bemerkt.

Eine Leistungskurs-Abituraufgabe zum Fächerbelegungsmodell

Heinz Althoff, Bielefeld

Zusammenfassung: Vorgestellt werden für die genannte Aufgabe die unterrichtlichen Voraussetzungen, die Aufgabenstellung, eine mögliche Lösung der Aufgabe sowie die Schwierigkeiten bei der Bewertung der Schülerarbeiten.

Unterrichtliche Voraussetzungen

Im Stochastikunterricht dieses Leistungskurses (Umfang etwa 120 Unterrichtsstunden) habe ich erstmals das Thema „Entwicklung und Anwendungen des Fächerbelegungsmodells" behandelt. Ich habe die zugehörige Unterrichtsreihe in (Althoff 1999) ausführlich dargestellt.

Die folgende Aufgabe bildete zusammen mit einer „normalen" Stochastikaufgabe und einer Analysisaufgabe die Abiturklausur 1998 in meinem Leistungskurs am Helmholtz-Gymnasium Bielefeld. Die Arbeitszeit betrug $4\frac{1}{4}$ Zeitstunden, davon waren etwa 30% für diese Aufgabe vorgesehen.

Aufgabenstellung

a) Beschreiben Sie das Fächerbelegungsmodell und verdeutlichen Sie, was das Modell zur Beschreibung bzw. zur Lösung stochastischer Probleme leisten kann.

b) Formulieren Sie eine zum Ansatz $P(E) = 1 - \frac{\frac{32!}{(32-10)!}}{32^{10}}$ passende Einkleidung für das Ziehen von Skatkarten. (Hinweis: Ein Skatspiel besteht aus 32 verschiedenen Karten.)