Überraschung beim Münzwurf

C. P. CHOLKAR / M. N. DESHPANDE, NAGPUR/INDIEN [1]
ÜBERTRAGEN VON INGEBORG STRAUSS, KRONBERG I. T.

Zusammenfassung: *Dieser Artikel behandelt den Korrelations-Koeffizienten beim Münzen-Werfen mit einem Ergebnis, das der Intuition zuwider läuft.*

1 Einleitung

Eine Laplace-Münze werde X-mal geworfen. Für den Augenblick betrachten wir X als konstant. H und T bezeichnen die absolute Häufigkeit für Kopf resp. für Zahl (= die andere Seite der Münze). Der Korrelations-Koeffizient zwischen T und H ist $= -1$, da $T = X - H$.

Angenommen, die Münze wurde M-mal geworfen, und X-mal erschien Kopf. Nun werfen wir nochmals X-mal. Jetzt ist X natürlich eine *Zufallsvariable*. Mit H und T bezeichnen wir wieder die Ausfälle Kopf resp. Zahl. Wenn wir Schüler nach der Größe des jetzigen Korrelations-Koeffizienten zwischen H und T fragen, erhalten wir weit überwiegend die Antwort -1. Das ist falsch.

Der folgende Beweis basiert auf der Anwendung des „wiederholten Erwartungswertes“: Für beliebige Zufalls-Variablen Y und Z gilt $E(Y) = E(E(Y|Z))$. Benutzt man dies, kann man leicht einsehen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
E(H) &= E(E(H \mid X)) = E(X/2) = M/4 \\
E(T) &= E(E(T \mid X)) = E(X/2) = M/4 \\
E(H^2) &= E(E(H^2 \mid X)) = E(X/4 + X^2/4) \\
&= M/8 + (M/4 + M^2/4)/4 \\
&= 3M/16 + M^2/16\,.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich $E(T^2) = 3M/16 + M^2/16$.

Daraus folgt

$$\mathrm{Var}(H) = E(H^2) - (E(H))^2 = 3M/16\,,$$

und natürlich ebenso $\mathrm{Var}(T) = 3M/16$.

Weiter rechnen wir

$$\begin{aligned}
E(HT) &= E(E(HT \mid X)) \\
&= E(E(H(X-H) \mid X)) \\
&= E(X^2/4 - X/4 - X^2/4) \\
&= E(X^2/4 - X/4) \\
&= (M/4 + M^2/4)/4 - M/8 \\
&= -M/16 + M^2/16
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(H,T) &= E(HT) - E(H)E(T) \\
&= -M/16 + M^2/16 - M^2/16 \\
&= -M/16\,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Zahlenwert für den Korrelations-Koeffizient – wir bezeichnen ihn mit ρ – zwischen H und T

$$\rho = (-M/16)/[(3M/16)(3M/16)]^{0,5} = -1/3 \qquad (1)$$

Dieses Resultat ist überraschend, da ρ nicht von M abhängt.

Wir registrieren, dass der Korrelations-Koeffizient von ursprünglich -1 auf nunmehr $-1/3$ angewachsen ist. Ursache ist, dass X nicht mehr konstant, sondern eben eine Zufallsvariable ist, also eine binomial-verteilte Variable mit den Parametern $(M\,,\,½)$

Dieses Ergebnis fordert die Frage heraus, ob es möglich ist, eine nicht-negative ganzzahlige Zufallsvariable X derart zu finden, dass unter sonst gleichen Bedingungen wie oben erreicht werden kann, dass der Korrelations-Koeffizient zwischen H und $(X - H)$ positiv wird?

Überraschender Weise ist dies möglich, wie wir jetzt zeigen werden.

Es lässt sich sogar der Extremfall mit einem Korrelations-Koeffizienten von $+1$ konstruieren.

2 Beweis

Es sei X eine nicht-negative ganzzahlige Zufalls-Variable mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Die Argumentation ist analog dem oben Dargelegten:

$$\begin{aligned}
E(H) &= E(E(H \mid X)) = E(X/2) = \mu/2 \\
E(X-H) &= \mu/2 \\
\mathrm{Var}(H) &= E(E(H^2 \mid X)) - \mu^2/4 \\
&= E(X/4 + X^2/4) - \mu^2/4 \\
&= \mu/4 + (\mu^2 + \sigma^2)/4 - \mu^2/4 \\
&= (\mu + \sigma^2)/4 \\
\mathrm{Var}(X-H) &= (\mu + \sigma^2)/4 \\
\mathrm{Cov}(H, X-H) &= E(E(H(X-H) \mid X)) - \mu^2/4 \\
&= E(X^2/2 - X/4 - X^2/4) - \mu^2/4 \\
&= (\mu^2 + \sigma^2)/4 - \mu/4 - \mu^2/4 \\
&= (\sigma^2 - \mu)/4\,,
\end{aligned}$$

also $\rho(H, X-H) = (\sigma^2 - \mu)/(\sigma^2 + \mu)$.

[1] Originalartikel *A Surprising Result in Coin Tossing* in *Teaching Statistics, Volume 24, Number 1, Spring 2002*, S. 10–11

Daraus folgt unmittelbar:

(i) Ist X eine Konstante, gilt $\sigma^2 = 0$ und $\rho = -1$.
(ii) Wenn $\sigma^2 - \mu > 0$, folgt $\rho > 0$.

Für den oben diskutierten Fall bestätigt sich $\mu = M/2$, $\sigma^2 = M/4$ (vgl. (1)) und deshalb

$\rho = (M/4 - M/2)/(M/4 + M/2) = -1/3$.

Für die diskrete Laplace-Variable X mit $P(X = i) = 1/N$ für $i = 1, 2, \ldots, N$ lautet die Rechnung so:

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X) = (N+1)/2 \\
\sigma^2 &= \mathrm{Var}(X) = (N^2-1)/12 \\
\rho(H, X-H) &= [(N^2-1)/12 - (N+1)/2]/ \\
&\quad\ [(N^2-1)/12 + (N+1)/2] \\
&= (N-7)/(N+5)
\end{aligned}$$

Ergebnis:

(i) Ist $N = 1$ (X also eine Konstante, d.h. $X = 1$), folgt $\rho = -1$.
(ii) Ist $N = 7$, folgt $\rho = 0$.
(iii) Ist $N > 7$, folgt $\rho > 0$, und ρ nähert sich für wachsende N asymptotisch der 1.

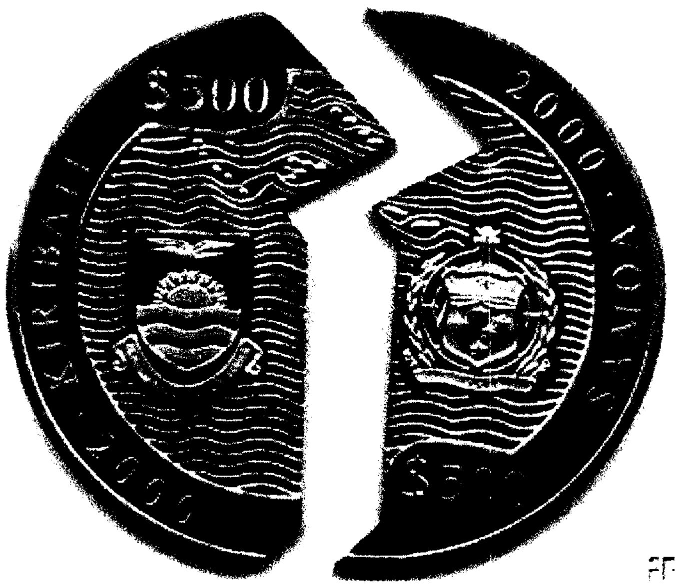
Autoren

C. P. Cholkar
Dharampeth Science College
Nagpur, Indien
E-Mail: mpcholkar@yahoo.com

M. N. Deshpande
Institute of Science
Nagpur, Indien
E-Mail: dpratap@nagpur.dot.net.in

Laplace-Münzen sind ein stochastisches Standard-Instrument, auch und gerade in der Schule. Dank des Einfallsreichtums der Münz-Prägeanstalten in den letzten Jahren sind die Fragestellungen und Auswertungsmöglichkeiten gestiegen. Zwei Beispiele:

1. Ungarn gab im Jahre 2000 zwei Münzen im Nennwert von 2000 Forint heraus, die jeweils aus zwei Halbkreis-Segmenten bestehen (KM #747, KM #748).
2. Western Samoa hatte 1997 die Idee, drei Gold-Münzen mit dem jeweiligen Nennwert 5 Tala zu kreieren in einer Form analog der bei unseren Jugendlichen so beliebten Freundschafts-Anhänger, bestehend aus zwei Teilen mit „wilder" Trennlinie (KM #115, KM #116, KM #117). Wohl in Absprache brachte die im südwestlichen Pazifischen Ozean gelegene Republik Kiribati zeitgleich ebenfalls drei in den „Hälften" umrissgleiche je 5 (Silber-)Dollars auf den Markt (KM #22, KM #23, KM #24). Ein Münz-Motiv ist u.a. das Sonnensystem. – Im Internet fand ich diese \$500-Münze aus dem Jahre 2000 (noch ohne KM-Nummer) mit der selben Durchriss-Linie. (Diese Münze ist nicht unter US\$ 2500,-- erhältlich.) Hier die Vorder- und Rückseite:



FT

Sind dies (π ×Daumen) Laplace-Münz-Hälften?