Wer tauscht gewinnt – das Paradoxon der zwei Umschläge

MATTHIAS LÖWE, MÜNSTER

Zusammenfassung: *Wir analysieren das so genannte Paradoxon der zwei Umschläge: Vor die Wahl gestellt, zwischen einem Umschlag zu wählen, in dem man einen Betrag vorgefunden hat, und einem anderen, der entweder die Hälfte oder das Doppelte des gefundenen Betrages enthält, scheint es stets günstiger zu tauschen. Wir geben eine probabilistische Analyse des Problems.*

1 Einleitung

In kaum einem Teilgebiet der Mathematik gibt es solch eine Fülle von Paradoxien wie in der Stochastik. Das Ziegenproblem, das in den neunziger Jahren die Gemüter der Öffentlichkeit beunruhigte, ist ein Beispiel. Das Bertrandsche Paradoxon, das Petersburger Paradoxon oder das Geburtstagsproblem sind andere. Die meisten dieser Paradoxien sind schnell aufgelöst: Ein sauberes mathematisches Modell legt schnell den Punkt offen, an dem unsere Intuition fehlgeleitet wird. Andererseits lässt uns dieses mathematische Modellieren auch unsere Einsicht in die Stochastik schärfen.

Das folgende Paradoxon, das so genannte Paradoxon der zwei Umschläge, ist hierbei ein besonders lehrreiches Beispiel:

Ein Gönner bietet an, Ihnen Geld zu schenken. Dabei stellt er sich so an, dass er das Geld in zwei Umschlägen deponiert, von denen bekannt ist, dass der eine doppelt so viel Geld enthält wie der andere. Wir ziehen einen davon und öffnen ihn. Danach bietet uns unser Gönner an, den Umschlag gegen den anderen zu tauschen – sollen wir das tun?

Wir überlegen: Wenn wir einen Betrag von x Euro gefunden haben, so enthält der andere entweder $\frac{x}{2}$ oder $2x$ Euro. Da wir ebenso gut den höheren wie den niedrigeren Betrag hätten ziehen können, ergibt sich für den zu erwartenden Gewinn beim Tauschen:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot 2x=\frac{5}{4}x.$$

Verglichen mit den x Euro, die wir mit dem ersten Umschlag sicher haben, ist dies ein Gewinn von 25 Prozent. Da dies für jeden Betrag x gilt, ergibt sich, dass wir besser tauschen sollten, als den ersten Umschlag zu behalten. Dieselbe Argumentation würde uns aber auch in dem Fall, dass wir den anderen Umschlag gewählt hätten, dazu raten zu tauschen. Dies aber kann schlecht sein: entweder ist es besser den einen Umschlag zu haben oder den anderen. Beides zugleich kann nicht der Fall sein. Wir stehen vor einem Paradoxon.

In einer Kolumne der Parade [4] liest man, ”während auf den ersten Blick Tauschen günstiger scheint, macht es faktisch keinen Unterschied”. Wie wir sehen werden, ist auch dies nicht vollständig wahr.

2 Analyse des Problems

Um zu verstehen, an welchem Punkt wir uns täuschen lassen, wollen wir die Situation noch einmal durchspielen, als seien wir selbst diejenigen, die zwischen den Umschlägen entscheiden dürften. Hierbei würden wir vermutlich umso eher den zuerst gewählten Umschlag behalten, je höher der darin gefundene Betrag ist. Dies ist vermutlich so, weil wir insgeheim glauben, dass die Auszahlung unseres Gönners durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gesteuert ist. So ist die Chance, im anderen Umschlag einen doppelt so großen Betrag zu finden als den bereits gefundenen großen, sehr klein. Wir wollen die in Abschnitt 1 gemachten Annahmen vor dem Hintergrund einer vorausgesetzten Verteilung für die Auszahlungen überdenken.

Wir wollen die beiden Umschläge mit A und B bezeichnen und annehmen, dass unser Gönner einen Betrag x mit Wahrscheinlichkeit p_x wählt (der Einfachheit halber sei x diskret, der kontinuierliche Fall geht ganz ähnlich). Diesen Betrag x legt er in Umschlag A, in Umschlag B deponiert er $2x$. Wir ziehen nun jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Umschlag A oder Umschlag B. Aufgrund der Symmetrie des Problems ist es nun in der Tat wahr, dass das Paar $(x,2x)$ für den Umschlag, den wir ziehen, und den verbleibenden ebenso wahrscheinlich ist, wie das Paar $(2x,x)$. Dies aber bedeutet mitnichten, dass auch die Paare $(x,2x)$ und $\left(x,\frac{x}{2}\right)$ gleich wahrscheinlich sind. In der Tat: nehmen wir für einen Moment an, dass p_x nur positive Werte für $x=2^n (n\in\mathbf{Z})$ annimmt, so impliziert die Tatsache, dass $(x,2x)$ und $\left(x,\frac{x}{2}\right)$ gleich wahrscheinlich sind, dass

$$p_x=p_{x/2}$$

gilt. Gilt nun für alle x von der Gestalt $x=2^n$, $n\in\mathbf{Z}$, dass $p_x=p_{x/2}$, so sind unter $p_\bullet$ alle $x=2^n$,

$n \in \mathbf{Z}$ gleich wahrscheinlich. Dies ist aber unmöglich, da die Menge der x mit $p_x > 0$ unendlich ist. In der Tat: es müsste ja gelten:

$$0 \neq \sum_{n \in \mathbf{Z}} p_x = 1.$$

Aus der Tatsache, dass nun alle p_x gleich groß sind, etwa gleich p und der ersten Ungleichheit folgt, dass $p \neq 0$ ist. Aus $\sum_{n \in \mathbf{Z}} p = 1$ aber folgt, dass p nicht positiv sein kann, da sonst die Summe jede endliche Schranke überbietet.

3 Eine Dichotomie

Wir wollen nun versuchen, das Paradoxon in zwei verschiedene Fälle zu zerlegen. Einen, in dem das Paradoxon nicht gilt, und einen, in dem es nur scheinbar besteht.

Hierbei betrachten wir den realistischen Fall zuerst: wir nehmen an, dass dem Gönner ein maximaler Betrag von M Euro zur Verfügung steht. In diesem Fall besteht das Paradoxon klarerweise nicht: Wenn man mehr als $\frac{M}{2}$ Euro in dem gewählten Umschlag vorfindet, kann dies nur derjenige sein, der den höheren der beiden Beträge enthält. Tauschen ist also nicht stets die beste Strategie (in der Tat lässt sich nachweisen, dass "Tauschen" im Mittel ebenso viel verliert wie gewinnt). Wir wollen nun wie im vorigen Abschnitt mit p_x die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass Umschlag A x Euro enthält (wieder sei p_x eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung). q_x bezeichnet ferner die Wahrscheinlichtkeit, dass wir Umschlag A gezogen haben, gegeben, dass wir x Euro vorgefunden haben, also formal

$$q_x := P(A \text{ gezogen} | x \text{ Euro gefunden}).$$

Es gilt

$$q_x = \frac{p_x}{p_x + p_{\frac{x}{2}}}, \tag{1}$$

da p_x die Wahrscheinlichkeit ist, dass x der kleinere Betrag ist und $p_{\frac{x}{2}}$ die Wahrscheinlickeit ist, dass der vorgefundene Betrag der größere Betrag ist. In der Tat läßt sich (1) – sofern nicht unmittelbar einsichtig – aus dem Satz von Bayes herleiten. Wir schreiben hierbei der Einfachheit A für das Ereignis "A wurde gezogen" und "x" für "x Euro wurden gefunden":

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{P(x|A)P(A)}{P(x|A)P(A) + P(x|B)P(B)} \\ &= \frac{P(x|A)}{P(x|A) + P(x|B)}, \end{aligned}$$

da

$$P(A \text{ gezogen}) = P(B \text{ gezogen}) = \frac{1}{2}.$$

Nun ist nach Konstruktion des Experiments (Umschlag A enthält den niedrigeren Betrag x und diesen mit Wahrscheinlichkeit p_x, Umschlag B enthält doppelt so viel, also $2x$)

$$P(x \text{ Euro gefunden} | A \text{ gezogen}) = p_x$$

und

$$P(x \text{ Euro gefunden} | B \text{ gezogen}) = p_{x/2}.$$

Dies ergibt (1).

Nun zahlt es sich aus zu wechseln, wenn der Gewinn beim Tauschen im Mittel größer ist als x. Dieser erwartete Gewinn beim Tauschen berechnet sich wie folgt: Mit Wahrscheinlichkeit q_x war der gezogene Umschlag A, in welchem Fall sich im anderen Umschlag $2x$ Euro befinden. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - q_x$ war der gezogene Umschlag B. In diesem Fall sind im anderen Umschlag $x/2$ Euro. Somit ist der zu erwartende Gewinn beim Tauschen $2xq_x + \frac{x}{2}(1 - q_x)$, d.h. Tauschen lohnt sich im Mittel, wenn

$$2xq_x + \frac{x}{2}(1 - q_x) > x.$$

Ein wenig Algebra zeigt, dass dies der Fall ist, wenn

$$4xp_x + xp_x + xp_{\frac{x}{2}} - xp_x > 2xp_x + 2xp_{\frac{x}{2}},$$

d.h. wenn

$$2p_x > p_{\frac{x}{2}} \tag{2}$$

ist. Finden wir also 100 Euro in unserem Umschlag, so hängt es von p_{50} und p_{100} ab, ob sich Tauschen auszahlt oder nicht. Besonders deutlich wird dies, wenn $p_{50} = p_{100} = \frac{1}{2}$ und $p_x = 0$ für $x \notin \{50, 100\}$ ist. Wir finden 50 Euro nun für den Fall, dass $x = 50$ realisiert wird, und wir Umschlag A wählen. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ und in diesem Fall erhalten wir beim Tauschen den Umschlag mit 100 Euro. Gleichermaßen finden wir mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ einen Betrag von 200 Euro in unserem Umschlag und fallen in diesem Fall beim Tauschen auf 100 Euro zurück. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ finden wir 100 Euro in unserem Umschlag. Tauschen wir nun, erhalten wir im Mittel $\frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 200 = 125$ Euro. Obschon dieser Betrag höher ist, als der, den ein zufällig gewählter Umschlag enthält (dieser berechnet sich als $\frac{1}{4}(100 + 100 + 50 + 200) = 112,5$ Euro), ist leicht einzusehen, dass diese Strategie nicht optimal ist. Tauschen wir z. B. nur, wenn wir 50 oder

100 Euro finden, behalten aber die 200 Euro, so erzielen wir

$$\frac{1}{4}\cdot 200+\frac{1}{4}\cdot 100+\frac{1}{2}\cdot 125 = 137,5 \text{ Euro.}$$

Es ist instruktiv eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu konstruieren, bei der sich Tauschen stets bezahlt macht. In diesem Fall muss nach dem oben hergeleiteten $2p_x > p_{\frac{x}{2}}$ sein, wann immer diese Wahrscheinlichkeiten nicht null sind. Nehmen wir nun an, p sei so eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbf{R}^+$. Da p_x immer noch als diskret angenommen ist, gibt es ein $x_0 \in \mathbf{R}^+$ mit $p_{x_0} > 0$. Für dieses x_0 enthält Umschlag A x_0 Euro und Umschlag B $2x_0$ Euro. Da wir annehmen, dass sich Tauschen stets auszahlt, muss $2p_{2x_0} > p_{x_0} > 0$ und daher $p_{2x_o} > 0$ sein. Analog ergibt sich $4p_{4x_0} > p_{x_0} > 0$ oder allgemein

$$2^i p_{2^i x_0} > p_{x_0}$$

für alle $i \in \mathbf{N}$. Mit Hilfe dieser Abschätzung lässt sich der Erwartungswert des Betrages in Umschlag A berechnen. Dieser ist:

$$\sum_{x:p_x>0} x p_x \geq \sum_{i=0}^{\infty} x_0 2^i p_{2^i x_0} \geq \sum_{i=0}^{\infty} x_0 p_{x_0} = \infty.$$

Tauschen lohnt sich also nur dann jederzeit, wenn die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung so ist, dass selbst der kleinere der beiden Beträge unendlichen Erwartungswert besitzt: eine paradiesische Situation.

Wir haben somit die folgende Dichotomie festgestellt: Entweder ist der zu erwartende Betrag in jedem der beiden Umschläge endlich. Dann kann das hier besprochene Paradoxon nicht auftreten. Oder aber selbst der kleinere der beiden Beträge besitzt einen unendlichen Erwartungswert. Dann kann es in der Tat sein, dass es stets günstiger ist, den erhaltenen Umschlag wieder einzutauschen.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, bei der diese letztere Situation der Fall ist, ist durch die folgende gegeben:

$$p_{2^i} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i$$

für $i \in \mathbf{N}_0$ und $p_x = 0$ für alle x, die nicht von der Form 2^i für ein $i \in \mathbf{N}_0$ sind. Für jedes $i \in \mathbf{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit q_{2^i}, dass wir Umschlag A gewählt haben, bedingt darauf, dass wir 2^i Euro gefunden haben, gegeben durch

$$q_{2^i} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{2}{5}$$

(hierbei wenden wir wieder den Satz von Bayes an).

Der erwartete Gewinn beim Tauschen – vorausgesetzt wir finden 2^i Euro, $i \in \mathbf{N}$ – ist somit

$$\frac{2}{5}2^{i+1} + \frac{3}{5}2^{i-1} = \frac{11}{10}2^i > 2^i \text{ Euro.}$$

Da die einzige andere Möglichkeit ist, 1 Euro zu finden, in welcher es selbstverständlich besser ist, seinen Umschlag einzutauschen, ergibt sich, dass Tauschen in jedem Fall die bessere Strategie ist. Berechnen wir jedoch den Erwartungswert des Betrages in Umschlag A, so erhalten wir

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty} 2^i \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^i = \infty.$$

4 Die St. Petersburger Version des Paradoxons

Der zuletzt diskutierte Fall eines unendlichen Erwartungswertes für den Betrag im Umschlag A ist ähnlich einer Version des Paradoxons der zwei Umschläge, die kürzlich von Chalmers [1] vorgestellt wurde. Es firmiert unter dem Namen ”St. Petersburger zwei Umschlag Paradoxon”. Hierbei wird für jeden der beiden Umschläge A und B eine seperate Münze geworfen. Zeigt die Münze beim $i$ten Wurf zum ersten Mal Kopf, so werden in dem entsprechenden Umschlag 2^i Euro deponiert. Somit ist der erwartete Betrag in jedem der beiden Umschläge

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^i 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Wählt man jetzt einen der beiden Umschläge und findet z.B. 2^n Euro, so wird es stets günstiger erscheinen, gegen den anderen zu tauschen, da dessen Erwartungswert unendlich ist. Chalmers [1] argumentiert, dies zeige, dass aus der Tatsache, dass für zwei Zufallsvariablen

$$\mathbf{E}\left[D \mid C = x\right] > 0 \text{ für alle } x$$

nicht folgt, dass auch $\mathbf{E}[D] > 0$ ist. Er wählt für C den Betrag im ersten Umschlag und für D die Differenz des Betrages im zweiten Umschlag gegenüber des ersten Umschlags. Dies ist freilich für endliche Erwartungswerte Unsinn. Vielmehr handelt es sich hier um eine typische Paradoxie der unendlichen Erwartungswerte: Der Erwartungswert von D ist mit der obigen Wahl von D der Erwartungswert des Differenzbetrags der beiden Umschäge. Bezeichnen wir mit A den Betrag in Umschlag A und mit B den Betrag in Umschlag B, so ist aufrgund der Linearität des Erwartungswertes

$$\mathbf{E}[D] = \mathbf{E}[A - B] = \mathbf{E}[A] - \mathbf{E}[B] = \infty - \infty$$

und somit nicht definiert.

Literatur

[1] Chalmers, D. (1996): The St. Petersburg two envelope paradox. Preprint. `http:\\avocado.wustl.edu.\~chalmers`.

[2] Clark, M. and Shackel, N. (2000): The two envelope paradox. Mind, Vol. 109, 415–442.

[3] Linzer, E. (1994): The two envelope paradox. American Mathematical Monthly 101, 417–419.

[4] v. Savant, M. (1992): Ask Marilyn. Parade, S. 20.

Anschrift des Verfassers
Matthias Löwe
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Einsteinstr. 62
D-48149 Münster
loewe@math.kun.nl