Hat das Gegenereignis etwas mit einem Gegenteil zu tun? – Was Schülerinnen und Schüler mit diesen Begriffen verbinden und welche Schwierigkeiten sich daraus ergeben können

RENATE MOTZER, AUGSBURG

Zusammenfassung: *Ausgehend von den Schwierigkeiten, zu bestimmten Ereignissen die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des jeweiligen Gegenereignisses zu berechnen, wurden Schüler und Studierende danach gefragt, was sie mit den Begriffen „Ereignis“ und „Gegenereignis“ verbinden, ob das Gegenereignis etwas mit einem Gegenteil zu tun hat und was das Gegenereignis bzw. Gegenteil in einer bestimmten Situation sei. Die Befragung zeigt zwei unterschiedliche Antwortansätze für das „Gegenteil“, die beide ihre Bedeutung haben. Geht es um die Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeit, muss genau differenziert werden, was nur eine gegenteilige Betrachtung der gleichen Situation ist und was wirklich „Gegenereignis“ genannt werden sollte.*

1 Der Ausgangspunkt der Befragung

„Zur Entwicklung von Stochastik-Kursen gehört auch ein reflektierter Umgang mit der Sprache der Stochastik,“([1], S.189) schrieb Lisa Hefendehl-Hebeker 1983 und beleuchtete deshalb den Umgang mit dem Wort „Ereignis“ näher. „Ereignis“ ist ein Grundbegriff im Stochastik-Unterricht, beziehen sich doch die Axiome von Kolmogorow auf Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten. Häufig wird dem Begriff „Ereignis“ etwas zu wenig Beachtung geschenkt, vor allem der Tatsache, dass diesem Begriff im umgangssprachlichen Gebrauch fast immer der Charakter des Außergewöhnlichen anhaftet. Diesen suggestiven Unterton findet man auch, wenn man im Duden den Begriff „Ereignis“ nachschlägt. Frau Hefendehl-Hebeker hat die Herkunft des Wortes und den Gebrauch in bekannten Zitaten untersucht (Bsp. „Große Ereignisse werfen ihre Schatten voraus.“) und kommt zu dem Ergebnis, dass im Mathematikunterricht thematisiert werden sollte, dass dieser Begriff dort anders, nämlich neutraler, verwendet wird. Sie bringt dies in Zusammenhang mit dem „Anspruch der Mathematik, neutral zu sein und allen denkbaren Fällen, für die sich irgendjemand interessieren könnte, Rechnung zu tragen.“ ([2], S. 10)
Ein Vergleich des allgemeinen Sprachgebrauchs und der Verwendung von entsprechenden Begriffen in der Mathematik sollte an vielen Stellen im Mathematikunterricht zum Tragen kommen, so auch hier. Meist gibt es neben den Gemeinsamkeiten des Sprachgebrauchs auch spezifische Komponenten der mathematischen Begriffe wie Aspekte der Eindeutigkeit und der Generalisierbarkeit.
Mich veranlassten die Schwierigkeiten, die Schüler und Schülerinnen oft damit haben, zu Ereignissen die passenden Gegenereignisse anzugeben und damit Wahrscheinlichkeiten richtig zu bestimmen, dazu, dem Verständnis für den Begriff „Gegenereignis“ ein bisschen auf die Spur zu kommen.
Als Beispiel für diese Schwierigkeit sei eine Aufgabe aus der Abschlussprüfung FOS Bayern Nichttechnik 2002 angeführt, die interessanterweise gerade bei ein paar guten Schülern/Schülerinnen zu einem besonderen Fehler geführt hat:

3.0 Ein großes Internetcafe hat Plätze an 50 PCs. Umfangreiche Untersuchungen haben gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein PC in der Kernzeit belegt ist, für jeden der 50 PCs p=0,7 beträgt. (In den beiden folgenden Aufgaben wird nur dieser Zeitbereich betrachtet.)
3.1 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der belegten PCs innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.
3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt mindestens 15 PCs frei sind.

Man kann sich sicher fragen, inwiefern diese Aufgabe realistisch und sinnvoll ist und ob sich das Modell „Bernoulli-Kette“ hier wirklich eignet. Da die Schüler und Schülerinnen kein anderes zur Verfügung hatten, lag es für sie durchaus nahe, es zu verwenden und für 3.2. im Tafelwerk die zugehörige Wahrscheinlichkeit der Binomialverteilung abzulesen.
Der Fehler, auf den ich hier das Augenmerk legen möchte, ist folgender:
In der Angabe steht, die Wahrscheinlichkeit für das Belegtsein sei 0,7. In 3.2 geht es um das „Freisein“. Das ist eine gegenteilige Betrachtung.
Weiterhin liegt eine Formulierung mit „mindestens“ vor, die Tabelle enthält aber nur Werte der Verteilungsfunktion, die sich auf „höchstens“ beziehen. Also noch einmal eine gegenteilige Formulierung.
Diejenigen Schüler und Schülerinnen, die diese Aufgabe falsch gelöst haben, haben sich offenbar ge-

sagt: Das Gegenteil von ,,mindestens 15 PCs frei“ ist ,,höchstens 35 besetzt“.
Also gilt: p(,,mindestens 15 PCs frei“) = 1- p(,,höchstens 35 besetzt“). Sie meinten folglich, mit dieser gegenteiligen Betrachtung seien sie beim Gegenereignis und dürften die entsprechende Formel für dessen Wahrscheinlichkeit anwenden.
Früher hätte ich dies als Fehler angestrichen und nicht weiter darüber nachgedacht. Erfahrungen mit einer ähnlichen Aufgabe lassen mich diesen Sachverhalt aber nun komplexer sehen.
Erstaunlicherweise habe ich nämlich festgestellt, dass die meisten Schüler und Schülerinnen, die ich befragt habe, in ,,höchstens 35 besetzt“ das Gegenteil zu ,,mindestens 15 frei“ sehen würden.
Diese Antwort habe ich vor allem bekommen, bevor der Begriff ,,Gegenereignis“ im Unterricht thematisiert wurde. Viele Schüler bleiben bei dieser Antwort auch über die Schulzeit hinaus, während sich andere durchaus von ,,höchstens 15 frei“ als Gegenereignis überzeugen lassen und dies später auch als ,,Gegenteil“ bezeichnen würden (vor allem, wenn sie im Rahmen einer Mathematikaufgabe danach gefragt werden).
Ich möchte nicht dafür plädieren, beide Begriffe synonym zu verwenden. ,,Gegenteil“ würde ich nicht definieren, vielmehr das ,,Gegenereignis“ als eine bestimmte Art des Gegenteils verstanden haben wollen.

2 Die erste Befragung von Studierenden

Die Vorlesung ,,Mathematik in der Grundschule“ soll allen Studierenden des Lehramts für die Grundschule einen Einblick in mathematische Hintergründe der Grundschulmathematik geben. Diese Vorlesung wird von den meisten Studierenden im 1. Semester besucht, ist also ihre erste Mathematikvorlesung an der Universität, hier der Uni München. Eine Grundlage der Grundschulmathematik ist der Umgang mit Mengen. Deshalb stellte ich im WS 2000/2001 auf dem 1. Übungsblatt Aufgaben zum Umgang mit Mengen zusammen. Die Studierenden sollten nach einer recht kurzen Vorbesprechung dessen, was in der Formelsammlung über Mengen steht, diese Aufgaben selbstständig bearbeiten. Es ging dabei weniger darum, ,,die“ richtige Lösung zu finden, als vielmehr eigene Ansätze zum Umgang mit diesen Aufgaben zu finden und zu erkennen, warum es sinnvoll ist, hier mit Mengen zu argumentieren und wie man damit im gegebenen Kontext arbeiten kann.
Da es in dieser Vorlesung nicht um Stochastik ging, wurden die Begriffe ,,Ereignis“ und ,,Gegenereignis“ nicht verwendet, der Begriff ,,Gegenmenge” im Sinne der ,,Restmenge“ war in der Vorlesung angesprochen worden und spielte auch in einer vorausgehenden Übungsaufgabe eine Rolle.
Die Aufgabe zum Gegenteil lautete:

Nach einiger Zeit stellt sich heraus, dass von den 20 Kindern der Klasse 1a einige Mathematik sehr mögen, die anderen mögen dieses Fach fast gar nicht.

a.) Jemand behauptet: ,,Mindestens 10 Kinder mögen Mathe.” Was wäre das Gegenteil dieser Behauptung?

b.) Ein anderer meint: ,,Mehr als 15 Kinder mögen Mathe.” Was wäre hier das Gegenteil?

c.) Was ist das Gegenteil von ,,Alle mögen Mathe.” bzw. ,,Keiner mag Mathe.” bzw. ,,5 mögen Mathe.”?

Obwohl darauf hingewiesen wurde, dass manche Aufgaben keine eindeutige Lösung besitzen, und obwohl dies auch bei vorausgehenden Aufgaben deutlich zu erkennen war, zweifelte hier niemand, dass es eine eindeutige Lösung dieser Aufgabe gäbe. Der Begriff ,,Gegenteil” wurde also durchaus als eindeutig empfunden – wenn auch von den unterschiedlichen Studierenden in unterschiedlichen Interpretationen. Dabei dachten viele Studierenden durchaus an Mengen und suchten jeweils eine Restmenge.
Für die Aufgabe a.) gab es folgende 2 Sichtweisen (die in der Besprechung der Aufgabe von einigen bekräftigt wurden):

I) Die Gesamtmenge ist die Klasse. Menge A ist die Menge der Kinder, die Mathe mögen. Folglich ist $\bar{A}$ die Menge aller Kinder, die Mathe nicht mögen. A enthält mindestens 10 Elemente, die Gesamtmenge 20, also enthält $\bar{A}$ höchstens 10 Elemente. Das Gegenteil ist also: ,,**Höchstens 10 Kinder mögen Mathe nicht**.”

II) Die Gesamtmenge besteht aus den Zahlen 0 – 20, wobei jede Zahl die Anzahl der mathemögenden Kinder angibt. Zu A gehören die Zahlen 10–20, also zu $\bar{A}$ die Zahlen 0-9. Das Gegenteil ist also: ,,**Höchstens 9 mögen Mathe**.”

Jede dieser Deutungsebenen scheint mir etwas für sich zu haben. Ich hatte die zweite intendiert – so verstand ich auch früher im Stochastik-Unterricht solche Aufgaben, bei denen Deutungen wie I) als falsch abgewiesen wurden.
Da die meisten dieser Vorlesungsteilnehmer im 1. Semester waren und viele ein paar Monate vorher erst ihr Abitur gemacht hatten, schwang bei einigen eine Erinnerung an ihren Stochastik-Unterricht mit. Anzumerken wäre, dass dieser freilich bei etlichen

einen unverständlichen Eindruck hinterlassen hatte, wie ich entsprechenden Aussagen auf einem Fragebogen zu ihren bisherigen Erfahrungen mit Mathematik entnehmen konnte. Erwähnt wurden in dieser Stunde keine stochastischen Begriffe.

Die Deutungen I) und II) sind nicht die einzigen Antworten, die bei Aufgabe a.) gegeben wurden – auch Mischformen traten auf und nicht alle Antworten können einem Schema zugeordnet werden. Oft wurden auch beide Sichtweisen miteinander verknüpft.

Bei den 26 Studierenden, deren Lösungen ich korrigieren konnte, wurde Sichtweise II) häufiger vertreten als Sichtweise I).

Eine weitere Antwort, die öfters zu finden war, lautete:

III) ,,Weniger als 10 Kinder (bzw. höchstens 9 Kinder) mögen Mathe nicht."

Zu ,,mindestens 10" wurde das Gegenteil ,,weniger als 10" gebildet, aus ,,mögen Mathe" wurde ,,mögen Mathe nicht". Es wurde also sowohl die Aussage über die Anzahl der Objekte negiert als auch die betrachtete Eigenschaft. Dass dies einen völlig anderen Sachverhalt darstellt und hier die beiden Ebenen I) (wo auf den gleichen Sachverhalt aus der Sicht derjenigen, die Mathe nicht mögen, geschaut wird) und II) (wo auf andere Möglichkeiten, wieviel Leute Mathe mögen könnten, geschaut wird) vermengt werden, war den Studierenden nicht ersichtlich. Dass hier nicht nur ein kleiner Fehler bzgl. der Zahlen 9 oder 10 auftritt (,,Randfehler") und die Studierenden nicht eigentlich nur Ebene I) meinten, kann man bei der Bearbeitung von Aufgabe b.) erkennen.

Hier wäre die Antwort nach I) ,,Weniger als 5 mögen Mathe nicht.",

nach II) ,,Höchstens 15 mögen Mathe."

Studierende, die a.) gemäß II) beantwortet haben, haben auch b.) so beantwortet.

Auch bei denen, die zunächst gemäß I) geantwortet haben, lässt sich eine Antwort bezüglich des gleichen Verständnisses nachweisen.

Nicht alle, aber die meisten, die a.) gemäß III) beantworteten, gaben bei b.) analoge Antworten.

Zusammenfassend kann bis hierher festgestellt werden, dass die Sichtweise zu a.) und b.) bei fast allen konstant war.

Ein weiterer Aspekt taucht bei Aufgabe c.) auf: Das Gegenteil von ,,alle mögen Mathe" ist (?) ,,keiner mag Mathe" und umgekehrt. Das scheint so tief im Menschen zu stecken, dass diese Antwort auftrat fast unabhängig davon, wie a.) und b.) gesehen wurden. Eventuell hätte eine Verwendung des Begriffes ,,Gegenmenge" in der Aufgabenstellung zu anderen Ergebnissen geführt. Eine Nachfrage, ob jemand diese Aufgabe dann anders beantwortet hätte, wurde allerdings von niemand positiv beantwortet.

Bei ,,mindestens" oder ,,mehr als" scheint es naheliegend, dass auch das Gegenteil etwas mit ,,mindestens" oder ,,höchstens" zu tun hat. Bei ,,alle" bzw. ,,keiner" hat man das Bedürfnis, auch beim Gegenteil ,,Eindeutiges" zu formulieren. Im Sinne des logischen Quadrats, das seit Aristoteles in der klassischen Logik verwendet wird, identifizieren die Studierenden hier das ,,Gegenteil" mit dem konträren Gegensatz und nicht mit dem kontradiktorischen Gegensatz, dem die Sichtweise II) entsprechen würde (vgl. [3], S. 50).

Bei ,,5 mögen Mathe" hatten auch einige das Bedürfnis nach ,,Eindeutigem", aber bei weitem nicht so viele. Dabei schrieb ein Teil der Studierenden ,,5 mögen Mathe nicht" und andere schrieben ,,15 mögen Mathe nicht" (letzteres passend zum Verständnis I)). Hier gibt es nicht das ,,krasse Gegenteil", das ,,alle" und ,,keiner" konträr einander gegenüber stellt. Weitere Studierende lösten diese Aufgabe gemäß Verständnis II) zu ,,mehr oder weniger als 5 mögen Mathe".

Dass das Gegenteil zu ,,alle" gemäß II) ,,mindestens einer nicht" sei, trat durchaus als Lösung auf, ebenso ,,mindestens einer" als Gegenteil zu ,,keiner". Diese Studierenden hatten auch bei a.) und b.) das Verständnis II) zugrunde gelegt. Eine Lösung gemäß I) wie ,,keiner mag Mathe nicht" bzw. ,,alle mögen Mathe nicht" wurde von niemandem abgegeben. Verständnis I) sitzt damit vermutlich nicht so tief wie Verständnis II), das bei einigen Studierenden wohl doch im Stochastikunterricht geprägt wurde. (Die Befragung in einer Schulklasse zu Beginn des Stochastikunterrichts ergab, dass hier durchaus einige konsequent im Sinne von I) geantwortet haben – gerade die guten Schüler und Schülerinnen der Klasse).

Bei der analogen Veranstaltung ein Jahr später stellte ich in einer Besprechung die beiden Lösungen I) und II) vor und versuchte den Studierenden die unterschiedlichen Denkansätze verständlich zu machen. Dies führte zu interessanten Diskussionen in der Vorlesung. Es gibt ja selten Anlässe, bei denen in der Mathematik kontrovers diskutiert wird – und in mathematischen Vorlesungen wird sowieso selten diskutiert. Daher war diese Vorlesungsstunde eine ganz besondere Stunde.

Sowohl die Version I) als auch die Version II) wurden von einigen Studentinnen verteidigt – und genauso

von anderen als völlig unverständlich zurückgewiesen. ,,Das ist doch nicht das Gegenteil“, hieß es allzu oft. Version I) schien einigen nicht das Gegenteil zu sein, denn es war doch das Gleiche – nur aus einer anderen Sicht formuliert. Bei Aufgabe c) wurde dies besonders deutlich.
Version II) indessen schien anderen eine völlig andere Situation zu beschreiben und konnte somit nicht gleichzeitig mit dem vorgegebenen Satz zutreffen. Also hatte es mit der Aufgabe nichts zu tun und konnte auch nicht das Gegenteil sein.
Den Studierenden auch die jeweils andere Sicht als eine legitime Sicht zu vermitteln war nicht einfach und gelang weder den Studierenden, die die Gegenposition vertraten, noch mir auf Anhieb. Bei einigen fiel im Lauf der Diskussion dann doch der ,,Groschen“ und sie konnten die andere Sicht schließlich doch noch nachvollziehen.

Dabei half auch eine Visualisierung der Ergebnisräume nur bedingt.
Für Version I) könnte man als Menge die Klasse zeichnen und die Teilmenge der mathemögenden Schüler markieren. Der Rest der Klasse sind dann die, die Mathematik nicht mögen.
Für Version II) kann Ω als Ausschnitt des Zahlenstrahls mit den Zahlen von 0 bis 20 dargestellt werden. Zum Ereignis ,,Mindestens 10 mögen Mathe“ gehören die Zahlen von 10 aufwärts. Also gehören zur Gegenmenge die Zahlen 0 bis 9, daher kann das Gegenereignis mit ,,höchstens 9 mögen Mathe“ umschrieben werden. Um mit den Begriffen ,,höchstens“, ,,mindestens“, ,,mehr als“, ,,weniger als“ besser umgehen zu können, ist die Visualisierung am Zahlenstrahl für viele hilfreich. Um allerdings die Frage nach dem Gegenteil überhaupt als eine Frage nach der Negierung der gegebenen Anzahl der Kinder mit der Eigenschaft ,,mögen Mathe“ zu verstehen, hilft diese Visualisierung auch nicht. Sie hilft erst eine Antwort zu finden, wenn die Frage als eine solche Frage verstanden wurde. Damit taten sich einige erstaunlich schwer.

Gerade für künftige Lehrer und Lehrerinnen scheint es mir eine wichtige Übung zu sein, die Gedankengänge von anderen verstehen zu lernen. Vielleicht werden sie später auch mal Schüler und Schülerinnen haben, die anders denken als sie selbst und deren Denkansatz doch seine Berechtigung hat, seine eigene Logik, auch wenn das anfangs selbst für die Lehrkraft nur schwer zu sehen ist.
Dass dies selbst in Mathematik vorkommen kann, ist für viele besonders ungewohnt.

Ein Student meinte schließlich, beide Versionen seien doch nur mathematische Konstrukte. In Wirklichkeit sei es doch eher so, dass ein Lehrer eine Klasse habe, in der mehr als 15 Kinder Mathe mögen. Sein Kollege erzähle ihm, in seiner Klasse sei genau das Gegenteil der Fall. Bei ihm mögen mehr als 15 Kinder Mathe nicht.
Ich habe dem Studenten versprochen, diese Interpretation als eine 3. Interpretation mit gleicher Berechtigung anzusehen. In der Gruppe vom Jahr vorher war es nur eine Studentin gewesen, deren Antwort sicher durchgängig in dieses Interpretationsschema passt. Aber ich denke, auch dieses Verständnis hat durchaus seine Berechtigung und passt dann auch zu dem konträren Gegenteil in c). Nur ist es hier etwas schwerer, eine Menge und ihre Restmenge zu konstruieren – aber es ist ja nicht zwingend, ,,Gegenteil“ mit einer ,,Gegenmenge“ in Verbindung zu bringen.

3 Befragung in einer Schulklasse zur gleichen Aufgabe

Der Begriff ,,Gegenereignis“ und das Rechnen mit seiner Wahrscheinlichkeit war in diesen Vorlesungen nicht vorgesehen – aber er spielt eine wichtige Rolle im Stochastikunterricht.
Dort taucht häufiger die Frage auf: ,,Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat mindestens einer … ?“ und diese Frage wird im Allgemeinen so beantwortet, dass man die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ermittelt, nämlich, dass ,,keiner ... hat“, und dann diese Wahrscheinlichkeit von 100% subtrahiert. Auch bei ,,mindestens 2 ...“ dürfte es häufig einfacher sein, die Wahrscheinlichkeit für ,,höchstens 1 ...“ zu betrachten. Die Arbeit mit Verteilungsfunktionen und dem Tabellenwerk führt ebenfalls allzu oft dazu, dass zunächst die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ermittelt wird, auch wenn das Wort ,,Gegenereignis“ vielleicht kaum mehr verwendet wird. Der Umgang mit dem Gegenereignis scheint mir daher ein wichtiger Aspekt des Stochastikunterrichts zu sein.
Aus diesem Grund habe ich das in Absatz 2 besprochene Übungsblatt aus der Grundschulvorlesung auch meinen Schülern und Schülerinnen einer 12. Klasse der Berufsoberschule Augsburg vorgelegt. Wieder blieb ich bewusst bei der Formulierung ,,Gegenteil“, um zu sehen, ob die Schüler und Schülerinnen diesen Begriff für eindeutig hielten und wie sehr sie ihn mit dem in Verbindung bringen würden, was ich unter dem Begriff ,,Gegenereignis“ zu besprechen vorhatte.
Ihre Antworten gingen so gut wie gar nicht in die von

mir intendierte Richtung der Version II).
Die guten Schüler und Schülerinnen vertraten konsequent (auch in Aufgabe c)) die Sichtweise I).
Einige Schüler und Schülerinnen waren bei c) unsicher. Das Gegenteil von „alle“ war für sie „keiner“ und umgekehrt, aber zu formulieren, „Alle mögen Mathe nicht.“ sei das Gegenteil von „Keiner mag Mathe.“, war ihnen dann doch nicht geheuer. So formulierten sie hier entweder als Gegenteil „Alle mögen Mathe.“ oder sie ließen diese Aufgabe mit Fragezeichen versehen unbeantwortet. Das Gegenteil zu „5 mögen Mathe.“ war für sie dann entweder „15 Schüler mögen Mathe.“ (passend zu den anderen Antworten in c)) oder „15 mögen Mathe nicht.“ (passend zu ihren Antworten bei a) und b)).

Eine Schülerin konnte zwar zu a) und b) keine eindeutige Antwort geben, meinte aber bei c), dass das Gegenteil von „Alle mögen Mathe.“ sei, dass einer, zwei, drei, ... ,alle kein Mathe mögen. Zu „Keiner mag Mathe“ schrieb sie als Gegenteil „dass mindestens einer Mathe mag.“ Zu „5 mögen Mathe.“: „Nur 4 mögen Mathe, oder nur 3 ... oder nur einer oder keiner.“ Sie verstand das „5 mögen Mathe“ vermutlich im Sinne von „Mindestens 5 mögen Mathe.“ Dies ist nicht völlig abwegig. Die zugehörige Schwierigkeit zeigt sich häufig bei Formulierungen mit „ein“, wobei aus dem Kontext nicht immer klar hervorgeht, ob „genau ein“ oder „mindestens ein“ gemeint ist.
Dieses Problem kann sowohl im Alltag („Ist hier einer, der ... ? “) als auch im Mathematikunterricht auftreten.
Die mathematische Formulierung „es gibt ein ...“ meint „es gibt mindestens ein ...“. Ansonsten würde man sagen: „Es gibt genau ein ...“. Wird aber im Stochastikunterricht nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass „ein Los ein Treffer ist“ o.ä., ist i.a. gemeint, dass „genau ein Los ein Treffer ist.“
Auch das ist ein Punkt, der im Unterricht immer angesprochen werden sollte. Wenn möglich sollten die Aufgaben eindeutig formuliert sein und das Wort „genau“ bzw. „mindestens“ verwendet werden.

Die gerade erwähnte Schülerin war also bei der Aufgabe c) sehr nahe an der Interpretation II) dran.
Damit war sie eine von ganz wenigen.

Als ich in der Besprechung Interpretation II) vorstellte, bekam ich einige sehr überzeugte Zustimmungen, dass das doch viel eher ein „Gegenteil“ sei als das, was diese Schüler und Schülerinnen selbst als Gegenteil formuliert hätten. Ihre Lösung hatte der Sicht I) entsprochen.
Diese Schüler und Schülerinnen (sie gehörten vor allem zu den guten Mathematikschülern) hatten sich also von der anderen Sichtweise überzeugen lassen und waren schon nicht mehr bereit, ihre ursprüngliche Lösung als ebenso sinnvoll anzusehen.
Doch nicht allen Mitschülern ging das so. Das zeigte sich auch am Ende des Schuljahres in der Bearbeitung der eingangs erwähnten Aufgabe der Abschlussprüfung.

In einer anderen (ziemlich schwachen) Schulklasse konnte ich zunächst gar niemand so nachhaltig von der Interpretation II) überzeugen, dass sie nach 3 Monaten noch präsent gewesen wäre.
Hier musste ich erneut erklären, dass das Gegenereignis eine Beschreibung aller möglichen Ergebnisse ist, bei denen der im Ereignis beschriebene Sachverhalt nicht zutrifft. Wenn das nicht passieren soll, was im Ereignis beschrieben wird, was könnte dann passieren? Was kann ich mit Sicherheit über den Ausgang des Experiments sagen, wenn ich weiß, dass E nicht eintritt?

Während die erste Frage darauf zielt, nicht die gleiche Situation aus der gegenteiligen Perspektive zu schildern, will die zweite Frage verdeutlichen, dass ich wirklich alle anderen Möglichkeiten ins Auge fassen muss und nicht nur eine (welche z.B. das krasse Gegenteil sein könnte).
Beide Aspekte des Gegenereignisses, dass die zugehörige Menge an Ergebnissen nichts mit der Menge gemein hat, die das Ereignis beschreibt, und dass sie alle anderen Ergebnisse beinhaltet, können wohl nicht genug betont werden.
Zunächst habe ich den Schülern und Schülerinnen geraten, bei der Perspektive zu bleiben, aus der das Ereignis formuliert wurde. Wenn im Ereignis von frei bleibenden Plätzen die Rede ist, dann sollte auch die Beschreibung des Gegenereignisses von frei bleibenden Plätzen handeln, wenn von Mathe-mögenden Schülern die Rede war, sollte man bei den Mathe-Mögenden bleiben.
Verlangt die Aufgabe, dass die Perspektive gewechselt wird, so sollte zunächst gemäß Interpretation I) aus der Gegenperspektive das *gleiche* Ereignis beschrieben werden und dann erst weitergedacht werden.

4 Befragung der Schulklasse zu den Begriffen „Ereignis“, „Gegenereignis“ und „Gegenteil“

Um die Begriffe „Gegenereignis“ und „Gegenteil“ gegeneinander abzugrenzen, habe ich die zuerst erwähnte Klasse ihre Einfälle zu folgenden Fragen notieren lassen :

1. Erläutern Sie (anhand eines selbstgewählten Beispiels), was Sie mit dem Begriff ,,Ereignis" verbinden.
2. Erläutern Sie den Begriff ,,Gegenereignis".
3. Welche Beziehung sehen Sie zwischen den Begriffen ,,Gegenereignis" und ,,Gegenteil"?

Ich sagte dazu, dass sie bei der ersten Frage nicht nur daran denken müssten, wie der Begriff im Mathematikunterricht verwendet wird.
Viele, die bei ,,Ereignis" einen nichtmathematischen Gebrauch von Ereignis erwähnten, formulierten auch zu diesen Ereignissen ,,Gegenereignisse".
Den Begriff ,,Ereignis" würden diese Schüler und Schülerinnen mit einem Musikevent, einem Losgewinn, einer Hochzeit, einer Party, einer Demo, einem Sportturnier in der Stadt A, aber auch mit einem nicht anspringenden Auto oder einem Unfall verbinden. Weniger spektakuläre Ereignisse wären: der Blick aus dem Fenster und dass 3 Autos vorbei fahren, oder das Kaufen einer Packung Eier, die alle unbeschädigt sind. Für einen Schüler ist das Ereignis eher das, was zu erwarten ist (sein Beispiel: Ein vorsichtiger Kartenspieler spielt nur, wenn er ein ,,todsicheres" Blatt hat.)
Entsprechende Gegenereignisse können dann sein: die Scheidung, eine Gegendemo, ein Sportturnier auch in der Stadt B, ein Auto, das anspringt, eine unfallfreie Fahrt oder dass mindestens ein Ei beschädigt ist. Es könnte auch sein, dass ein Musikevent enttäuschend ist, weil die Band schlecht spielt, man die Lieder nicht kennt und nicht mitsingen kann oder die Freunde plötzlich nicht mitkommen wollen. Oder: der vorsichtige Kartenspieler spielt nicht einmal, als er ein todsicheres Blatt hat. (Wenn er spielt, obwohl das Blatt nicht so toll ist, sollte dies als ,,Gegenteil" angesehen werden).

Das mathematische Verständnis von ,,Ereignis" wurde an Hand folgender Beispiele beschrieben: beim Würfeln eine 3 werfen, beim Würfeln eine gerade Zahl werfen, beim Ziehen einer Kugel eine mit einer geraden Nummer ziehen, eine rote Kugel ziehen, beim Werfen von 2 Würfeln werden eine 5 und eine 3 gewürfelt (Summe 8), oder es werden über 7 Punkte erzielt (als ein anderes Ereignis zum gleichen Experiment).
Als Gegenereignis würde dann angesehen: ,,ein Wurf unter 7 Punkte" (ich vermute einen Randfehler). Das Gegenteil wäre für die gleiche Schülerin: ,,Wurf hat nicht 8 Punkte". Der Unterschied scheint mir darin zu liegen, dass sich das Gegenteil nur für ein konkretes Ergebnis (eine 5 und eine 3) formuliert wird, während sich das Gegenereignis auf eine Menge von Ergebnissen (alle Ergebnisse über 7 Punkte) bezieht. Das Gegenteil kann also für diese Schülerin nur das Gegenereignis zu einem Elementarereignis sein.

Derjenige Schüler, der es beim Beispiel Eierkauf als Ereignis ansieht, dass alle Eier unbeschädigt sind, und als Gegenereignis, dass mindestens 1 Ei beschädigt ist, schlägt als Gegenteil vor: ,,Wir kaufen uns 1kg Tomaten." Gegenteil und Gegenereignis sind für ihn also nicht dasselbe. ,,Ich denke, dass das Gegenereignis im direkten Bezug zum Ereignis steht und dass das Gegenteil ein anderes Ereignis schildert."
Ähnlich schreibt ein anderer Schüler: ,,Das Gegenereignis steht in Bezug zum Ereignis, wobei das Gegenteil keinen Bezug aufweist und genau das gewisse Andere von der Hauptaussage darstellt." Im Sinne der klassischen Logik könnte er hier das Gegenereignis mit dem kontradiktorischen Gegensatz in Verbindung gebracht haben und das Gegenteil mit dem konträren Gegensatz.
Eine Schülerin denkt dabei auch ans Rechnen: ,,Mit dem Gegenteil kann man nicht rechnen. Bei Gegenereignissen sieht das anders aus, denn diese haben einen Bezug zum ursprünglichen Ereignis und man kann dann auf das jeweilige andere Ereignis schließen."

Viele sehen im ,,Gegenteil" starke Gegensätze wie ,,schwarz – weiß", ,,oben – unten". ,,Im allgemeinen Sprachgebrauch ist das am weitesten entfernte Ereignis das Gegenteil." , während das Gegenereignis z.B. durch alle anderen Farben gegeben ist.
Eine andere Schülerin formuliert das so: ,,Gegenereignis ist ein größerer Raum an Ereignissen. Gegenteil ist ein Ergebnis, das Gegenteil des wahren Ergebnisses."
Es gibt aber auch eine Schülerin, die diese Aspekte vor allem beim ,,Gegenereignis" sieht: ,,Gegenteil ist wie ein Spiegelbild, genau verkehrt herum. Gegenereignis ist genau die andere Seite, Meinung, Ja $\leftrightarrow$ Nein, Ying $\leftrightarrow$ Yang, Schwarz $\leftrightarrow$ Weiß. Unter Gegenereignis verstehe ich das, was entgegen wirkt. Das, was bei gleicher Intensität auf beiden Seiten 0 ergibt. 10 Teile Säure und 10 Teile Lauge ergeben Neutralität." Für sie ist also der Unterschied zwischen ,,Ereignis" und ,,Gegenereignis" größer als der zum ,,Gegenteil."

Jemand greift auch die beiden Interpretationen I) und II) auf – allerdings leider nicht so, wie man es für die

Bearbeitung von Stochastikaufgaben zum Gegenereignis bräuchte –:
„Gegenereignis: Das ist für mich das Ereignis, nur aus einer anderen Sichtweise betrachtet. Gegenteil: ist für mich die Umkehrung des Ereignisses: Es fahren eben nicht 3 Autos vorbei, sondern eben mehr oder weniger als 3.“ Diese Schülerin hat sich vielleicht die im Unterricht thematisierte Unterscheidung in falscher Weise gemerkt. Auch das kann wohl nie ganz vermieden werden.

Ein anderer meint zum Gegenereignis: „Zwei Ereignisse die gleichzeitig laufen. Betrachtet man sich dann nur eins, ist das andere das Gegenereignis.“ Das Gegenteil ist für diesen Schüler durch Gegensatzpaare gegeben.
Eine Schülerin bringt noch den Unterschied zwischen dem Augenblick, in dem ein Ereignis stattfindet (oder das Gegenereignis), und einem dauerhaften Aspekt: „Beim Gegenteil ist es z.B. so, dass nie eine Hochzeit oder ein Unfall stattfinden wird, ..., man wird nie einen Hauptgewinn ziehen.“
Drei Schüler und Schülerinnen sehen keinen wirklichen Unterschied zwischen Gegenereignis und Gegenteil. Einer meint: „Es kommt hier auf den Sprachgebrauch an, denn in der Mathematik spricht man anstatt vom Gegenteil vom Gegenereignis und im deutschen Sprachgebrauch wird das Wort Gegenteil benützt.“

Dazu wäre vielleicht anzumerken, dass wir in vielen Schulbüchern das Wort „Umgangssprache“ finden, wenn da steht, „nicht A“ sei das Gegenereignis von A.
Was heißt nun „nicht Hochzeit“? Genau genommen müsste es schon heißen: „Die Hochzeit findet nicht statt.“ Oder doch: „Es findet eine Nichthochzeit statt“, was wohl doch nur eine Scheidung sein kann?
Wenn es um einen einzelnen PC geht, so ist das Gegenereignis zu „der PC ist besetzt“ „der PC ist nicht besetzt“ bzw. „der PC ist frei.“
Geht es um mehrere PCs, was ist dann das Gegenereignis zu „15 PCs sind besetzt“? Ist es nun „15 PCs sind nicht besetzt“ oder „nicht 15 PCs sind besetzt“ (sondern weniger oder mehr)?
Es geht um die Problematik, dass beim Gegenteil irgendwo das Wort „nicht“ in den Satz zu stecken ist. Wenn „nicht A“ die umgangssprachliche Formulierung für das Gegenereignis ist, wohin soll nun das „Nicht“ im konkreten Satz?
Muss es im klassischen Fall, bei dem das Ausgangsereignis „alle ...“ lautet, „nicht alle ...“ oder „alle ...nicht“ lauten? Formal geht es um das richtige Setzen der Quantoren, so dass die Gegenteilsaussage den entgegengesetzten Wahrheitsgehalt hat und die Disjunktion von beiden Aussagen wahr ist. Das Zweite trifft nur für den kontradiktorischen Gegensatz zu, welchem „nicht alle ....“ bzw. „mindestens einer ...nicht“ entspricht, während der konträre Gegensatz „alle ... nicht“ nur der ersten Bedingung genügt (vgl. dazu auch [4], S.53).
Wenn es nur um einen Teil geht, der mit „mindestens“ oder „höchstens“ oder auch mit „genau ... “ beschrieben wird, was wäre jeweils das Entsprechende?

5 Folgerungen

Die Befragung der Schüler und Schülerinnen zeigt, dass die Begriffe keineswegs einheitlich verstanden werden. Daher erscheint es mir wichtig, unterschiedliche Sichtweisen der Begriffe im Unterricht zu thematisieren.
Ob man im Zusammenhang mit Gegenereignissen auch den Begriff „Gegenteil“ verwenden soll, scheint fraglich. Beide Begriffe werden von den meisten Schülern und Schülerinnen nicht synonym verstanden. Man muss also die Unterschiede diskutieren. Dabei kann „Gegenteil“ als mehrdeutiger Begriff stehen bleiben. „Gegenereignis“ ist hingegen ein Begriff, der im Alltag nicht unbedingt vorkommt. Wie man an den erwähnten Beispielen sieht, kann man ihn aber auch zum Alltagsgebrauch von „Ereignis“ in Beziehung setzen. Freilich stößt man dabei auf Phänomene, die mit der Ereignisalgebra nicht unbedingt in Verbindung gebracht werden können.
Interessanterweise sieht auch nicht jeder den gleichen Unterschied zwischen „Gegenteil“ und „Gegenereignis“. Die Befragung zeigt aber, dass es Schüler gibt, für die das, was wir als Gegenereignis betrachten, eher mit dem Begriff „Gegenteil“ verbunden werden sollte.

Daher möchte ich vorschlagen, den Begriff „Ereignis“ in seinem allgemeinen Sprachgebrauch zu diskutieren, um dann herauszustellen, wie er im Stochastikunterricht verwendet wird und warum er mit einer Teilmenge von Ω zusammenhängt.
Daran anschließend kann formal über die Restmenge der Begriff „Gegenereignis“ eingeführt werden. Von daher ist das Gegenereignis eine Beschreibung *all* der Ergebnisse, die *nicht* zum Ereignis passen. Diese Verwendung des Begriffes „Gegenereignis“ sollte dann aber noch einmal mit dem alltäglichen Sprachgebrauch und dem Begriff „Gegenteil“ in Zusammenhang gebracht werden.

Zumindest sollte der Unterschied zwischen einer gegenteiligen Sicht auf die gleiche Situation, die deren Wahrscheinlichkeit nicht ändert, und der Betrachtung aller Situationen, die auftreten können, wenn das geschilderte Ereignis nicht zutreffen sollte, herausgearbeitet werden und vielleicht mit Aufgaben wie den folgenden geübt werden:

I) Beschreiben Sie die gleiche Situation aus dem Blickwinkel .... (mögen Mathe nicht/ ist frei).

II) Welche Konstellationen sind möglich, wenn ... nicht zutreffen sollte?

Oder:

Welche der folgenden Ereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, für welche gilt, dass sich die Wahrscheinlichkeiten zu 100% ergänzen?

Literatur

[1] Hefendehl-Hebeker, L. (1983): Ein Vorschlag für Einführung des Begriffes „Ereignis" im Stochastikunterricht. Math. Didact. v.6(3/4), 189–195.

[2] Hefendehl-Hebeker, L. (1983): Der Begriff „Ereignis" im Stochastikunterricht. Stochastik in der Schule 3(2), 4–16.

[3] Schupp, H. (1970): Elemente der Logik als Mittel der Unterrichtsvertiefung. Braunschweig: Westermann.

[4] Maier, H., Schwaiger, F. (1999): Mathematik und Sprache. Wien: ÖBV & HPT.

Anschrift der Verfasserin
Renate Motzer
Didaktik der Mathematik
Universität Augsburg
Universitätsstr. 10
D-86135 Augsburg
Renate.Motzer@gmx.de

Tippfehler-Korrektur zum Artikel "Nuancen der Nichtbeliebigkeit von Aktienkurs-Modellierungen", Stochastik in der Schule 23(2), 7–13 (2003):

Beim Übertrag des Originals in die Druckversion wurde in Definition 4.1$(\overline{ii})$ auf Seite 12 irrtümlicherweise das Ungleichheitszeichen verfälscht. Die korrekte Formulierung lautet:

$(\overline{ii})$ $\overline{V}_T(\omega) := \bar{x}B_T + \bar{y}A_T(\omega) \geq 0$ für $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$,

gez. Wolfgang Stummer