Excelblatt vereinfacht Stochastik

STEFAN BARTZ, MECKEL

Zusammenfassung: *Mit einem einzigen Excel-Tabellenblatt können die Binomial-, Normal-, Poisson- und Hypergeometrische Funktionen sehr übersichtlich dargestellt werden. Die Funktionswerte lassen sich so leicht ermitteln, dass viele Aufgabentypen exakter und deutlich einfacher gelöst werden können. Die ausgedehnten Verteilungstafeln für die Binomial- und Standardnormalfunktion sind nicht mehr notwendig. Man ist von der Einschränkung befreit, nur diejenigen Aufgaben behandeln zu können, deren Werte tabelliert vorliegen. Insgesamt kann durch das vorgestellte Excel-Tabellenblatt die zweite Hälfte der Schulstochastik wesentlich klarer vermittelt werden.*

Vorteile für den Unterricht

Flexiblere Aufgabengestaltung

Im Gegensatz zu den tabellierten Wahrscheinlichkeitswerten in den Schulbüchern, die lückenhaft und sehr begrenzt sind, können über das Excel-Tabellenblatt *alle* Werte der Binomial-, Normal-, Poisson- und Hypergeometrische Funktionen [1] abgerufen werden (auf 15 Nachkommastellen genau). Damit lassen sich Aufgaben lösen, die im bisherigen Stochastikunterricht nicht gelöst werden konnten. Man erhält mehr Freiheiten in der Aufgabengestaltung.

Weniger Ablesefehler

Das mühselige und oft fehlerbehaftete Ablesen in den umfangreichen Verteilungstafeln der Binomial- und Standardnormalfunktion erübrigt sich.

Größere Anschauung

Die Graphen der Funktionen werden visualisiert. Ihre Eigenschaften treten so deutlicher hervor und können besser vermittelt werden. Man kann beispielsweise durch Scrollen an den Parameterwerten direkt erkennen, wie sich diese auf den Verlauf der Graphen auswirken:

So wandert der Graph bei der Binomialfunktion (in Abb. 1 im Original blau) beim Hochscrollen von n weiter nach rechts und die Glocke wird gleichzeitig flacher und breiter. Dagegen verändert μ bei der Normalfunktion (im Original orange) nicht die Glockenform, sondern nur ihre horizontale Lage.

Unterschied zwischen Parametern und Variablen erfahrbar

Im Gegensatz zu den Parametern verändert sich der Graph durch eine Erhöhung der Variablen x nicht. Es wird lediglich der Flächeninhalt einer weiteren Säule in das Ergebnis mit einbezogen. Über das Kontrollkästchen "Fläche anzeigen" wird sichtbar, bis zu welcher Stelle der Flächeninhalt bestimmt wird. Somit kann auch der Zusammenhang zwischen den Werten der oben bestimmten kumulierenden $\mathrm{Bin}_{n,p}(X \le x)$ und der im Diagramm angezeigten nicht-kumulierenden Binomialfunktion $\mathrm{Bin}_{n,p}(X = x)$ veranschaulicht werden.

Graphenvergleich und Graphenanpassung möglich

Die Graphen der verschiedenen Funktionen können gleichzeitig eingeblendet und miteinander verglichen werden.

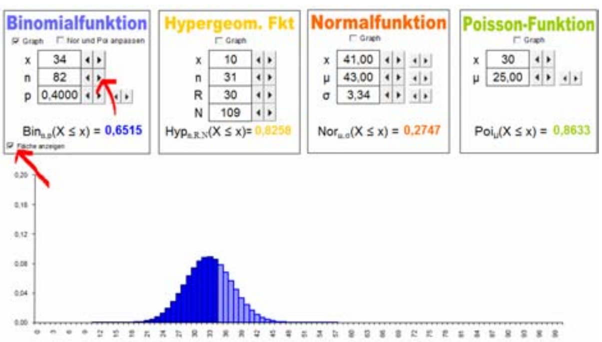

Abb. 1

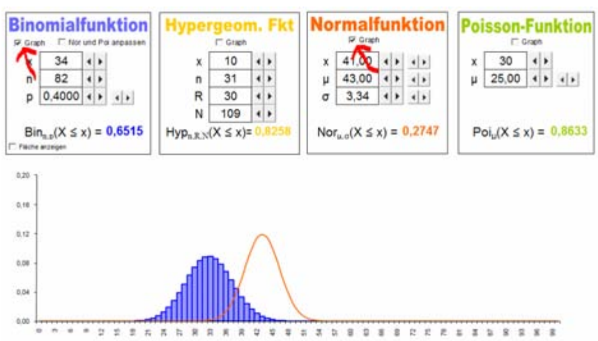

Abb. 2

So kann durch Scrollen an den µ- und σ-Werten gezeigt werden, unter welchen Bedingungen eine Normalfunktion eine vorgegebene Binomialfunktion approximieren kann (siehe Abb. 2).

Synchronisation möglich

Durch Klicken eines Kontrollkästchens können Normal- und Poisson-Funktion mit der Binomialfunktion synchronisiert werden, d.h. man kann sehen, wie sich die Parameterwerte und die Graphen automatisch an diese anpassen. (Das ist z.B. bei älteren Excelversionen interessant. Excel 2002 und ältere Versionen können ab n = 1030 nicht mehr alle kumulierten Binomialfunktionswerte bestimmen und geben stattdessen "#####" aus.) Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten können dann auch bei der angepassten kumulierten Normalfunktion abgelesen werden. Im unteren Beispiel (Abb. 3) beträgt sie **0,9780**. Der σ-Wert von 13,90 (> 3) zeigt, dass es sich dabei um eine gute Näherung handelt.

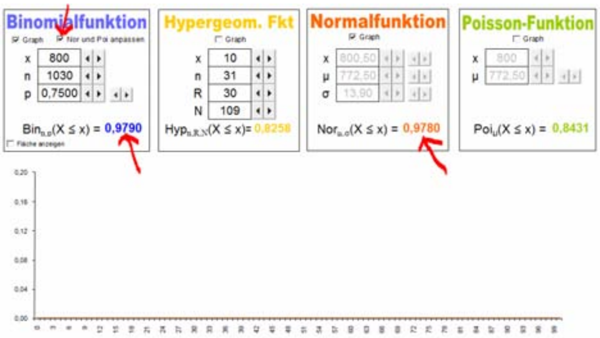

Abb. 3

Transformation nicht mehr notwendig

Eine Transformation von der jeweiligen Normalfunktion zur Standardnormalfunktion, die vielen Schülern schwer fällt und oft rezeptartig und ohne tieferes Verständnis vorgenommen wird, ist nicht mehr notwendig. Die entsprechenden Werte lassen sich nun direkt bestimmen.

Poisson – Funktion überflüssig

Ebenso wird die Behandlung der Poisson-Funktion für den Unterricht überflüssig. Sie wurde bisher verwendet, um die Binomialfunktionswerte bei sehr kleinem p und großem n annähernd berechnen zu können. Excel kann die *relevanten* Werte jedoch direkt ermitteln (auch für n ≥ 1030).

Umkehraufgaben leichter lösbar

Das Excelblatt lässt sich nicht nur in den Kapiteln über die verschiedenen stochastischen Funktionen einsetzen, sondern leistet gerade bei weiterführenden Themen wie Schätzen und Testen von Hypothesen sehr gute Dienste. Bei diesen Umkehraufgaben sind ja Wahrscheinlichkeiten vorgegeben und x, n oder p gesucht. Diese Variablen- bzw. Parameterwerte lassen sich nun experimentell ermitteln, indem man z.B. den Wert von p über den jeweiligen Scrollbutton so lange verändert, bis die geforderte Wahrscheinlichkeit erreicht ist. Drei Beispielaufgaben sollen das verdeutlichen.

Goldstandard: Das randomisierte, doppelblinde, Placebo-kontrollierte Experiment

MANFRED BOROVCNIK

Medizinische Forschung ist ständig herausgefordert, neue Behandlungsmethoden und neue Medikamente zu entwickeln, damit die Chancen, Krankheiten erfolgreich behandeln zu können, verbessert werden. Das Wissen reicht allerdings meist nur dazu aus, neue Behandlungsmethoden auszusondern, welche Erfolg *versprechen*; um sie jedoch auszutesten, bedarf es ihres gezielten, überprüfbaren Einsatzes. Was kann die Medizinische Statistik / Biometrie dazu beitragen, den Erfolg oder Misserfolg solcher Experimente zu beurteilen?

Der Goldstandard in der biometrischen Praxis ist das so genannte randomisierte, doppelblinde, Placebo-kontrollierte Experiment mit Versuchs- und Kontrollgruppe: Von allen Patienten werden – wie im Lotto – durch Zufall jene ausgewählt, welche die neue Behandlung (Operationsmethode, Medikament, Therapieschema etc.) erhalten, und, welche nur ein Placebo bekommen, das ist eine neutrale Behandlung, welche sich jedoch äußerlich nicht von der eigentlichen Behandlung unterscheidet. Hinsichtlich der Zielgröße (Überlebensdauer, Dauer bis zum Wiederauftauchen eines Karzinoms, Absenken von Viren unter die Nachweisgrenze, Dauer und Stärke des Schmerzes etc.) werden nun Versuchs- und Kontrollgruppe miteinander verglichen. Wenn sich ein sehr großer Unterschied als Behandlungserfolg ergibt, so braucht man keinen Statistiker mehr, um dies festzustellen. Dieser Idealfall tritt selten so deutlich ein, man muss sich schon mit Teilerfolgen – kleineren Verbesserungen bei z.B. gleichzeitiger Verringerung der Nebenwirkungen – zufrieden geben. Hier kann man nur mit Hilfe von statistischen Methoden beurteilen, ob ein festgestellter Behandlungserfolg auch als abgesichert gelten kann. Denn: Die Wirkung der Behandlungsmethode ist nicht immer gleich: Alter, Gesamtkonstitution, Fortschreiten der Krankheit, sonstige Begleiterscheinungen u.v.m. beeinflussen und verwischen die Unterschiede zwischen Behandlungs- und Kontrollgruppe. Man nennt solche Einflüsse Störgrößen oder Confounder.

Die entscheidende Frage ist: Kann man bei Wiederholung der Studie, kann man beim Einsatz der neuen Methode in der medizinischen Praxis mit ähnlichen, verbesserten Behandlungserfolgen rechnen, oder hatte man in der gegenständlichen Studie einfach nur Glück?

Beispiele zur Illustration

Beispiel 1: n gesucht

Wie oft muss man einen gerechten Würfel mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit (Wk) von mindestens 95% wenigstens 2-mal eine "6" zu erhalten?

(1) $X \geq 2$

(2) binomialverteilt mit n = ? und $p = \frac{1}{6}$

(3) $\text{Bin}_{n;\,0{,}167}(X \geq 2) \geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow 1 - \text{Bin}_{n;\,0{,}167}(X \leq 1) \geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow \text{Bin}_{n;\,0{,}167}(X \leq 1) \leq 0{,}05$

$\Rightarrow \quad n \in [27;\infty)$

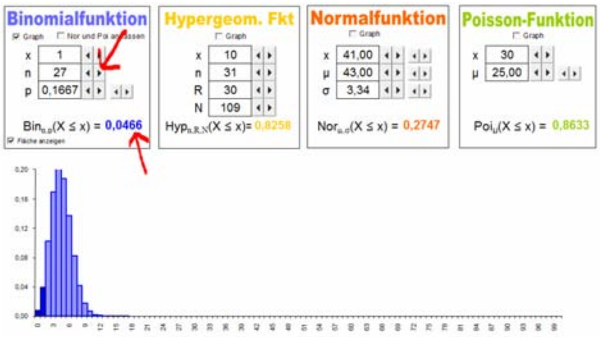

Abb. 4

Im Excelblatt stellt man bei der Binomialfunktion $p = \frac{1}{6}$ und x = 1 ein. Beim Verändern des n-Wertes über den Scrollbutton erkennt man, dass $n \geq 27$ werden muss, wenn man eine Wk von kleiner gleich 0,05 erreichen will.

Beispiel 2: p gesucht (Schätzen)

Man hat keinen Anhaltspunkt, wie groß die Trefferwahrscheinlichkeit p für eine "6" bei einem verbeulten Würfel ist. Deshalb wirft man ihn 50-mal und erhält 32-mal eine "6". Schätze p mit einem 95% Vertrauensintervall.

(1) X = 32

(2) binomialverteilt mit n = 50 und p = ?

(3) $0{,}025 \leq \text{Bin}_{50;\,p}(X \leq 32) \leq 0{,}975$

$\Rightarrow \quad p \in [0{,}5123;\, 0{,}7708]$

Wenn man davon ausgeht, dass sich das erzielte Stichprobenergebnis innerhalb des Hauptstreubereichs (≥ 95%) befindet, muss p zwischen 51,23% und 77,08% liegen.

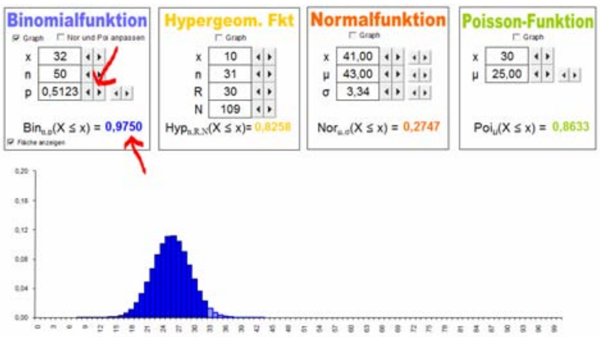

Abb. 5

Hier erhält man die Lösung mit Hilfe der Scrollbuttons von p.

Beispiel 3: x gesucht (Testen)

Annika behauptet, dass sie nur am Geschmack erkennt, ob der Tee mit entkalktem oder nicht entkalktem Wasser hergestellt wurde. Bei 44 Versuchen stimmt ihre Angabe in 28 Fällen. Ist damit bewiesen, dass sie einen sehr sensiblen Geschmacksinn hat (Signifikanzniveau 5%)?

(1) X = ?; $p_0 = 0{,}5$ $\quad p_{spek} \neq 0{,}5$ (→ beidseitig)

(2) binomialverteilt mit n = 44 und $p_0 = 0{,}5$

(3) $0{,}025 \leq \text{Bin}_{44;\,0{,}5}(X \leq x) \leq 0{,}975$

$\Rightarrow \quad x \in [16;\, 27]$

Da sich das Stichprobenergebnis außerhalb des Hauptstreubereichs (≥95%) befindet, ist es sehr unwahrscheinlich, dass p_0 dem durchgeführten Zufallsvorgang zugrund liegt. p_0 kann also abgelehnt, und somit p_{spek} bestätigt werden; d.h. man geht davon aus, dass Annika nicht nur rät.

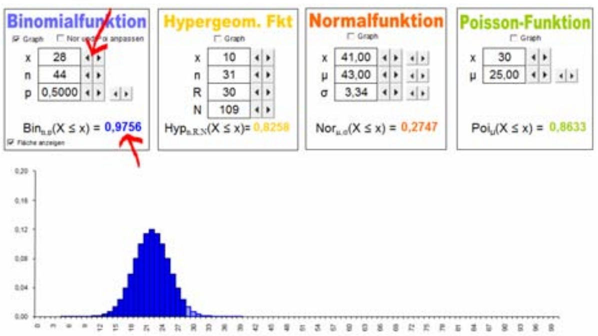

Abb. 6

p_{spek} beschreibt die spektakuläre neue Hypothese, die man verifizieren will; p_0 die ihr entgegenstehende Nullhypothese. Im Excelblatt wird n = 44 und p = 0,5 eingestellt und x durch Scrollen ermittelt.

Vergleich alter und neuer Lösungswege

Demgegenüber waren die bisherigen Lösungsverfahren dieser Umkehraufgaben oft so aufwendig, dass der eigentliche Lösungsgedanke leicht aus den Augen verloren wurde.

Außerdem waren die angewandten Näherungen manchmal so grob, dass sie zu falschen Entscheidungen führten. Folgende Gegenüberstellung veranschaulicht das anhand der Beispiele 2 und 3:

Bisheriger Lösungsweg (mit Verteilungstafeln)	**Neuer Lösungsweg** (mit Excelblatt)
$0{,}025 \le Bin_{50;\,p}(X \le 32) \le 0{,}975$ für $0{,}025 \le Nor_{\mu;\,\sigma}(X \le 32) \le 0{,}975$ $\quad\mid$Quantilentabelle gilt $Nor_{\mu;\,\sigma}(\mu-1{,}96\sigma \le X \le \mu+1{,}96\sigma) \ge 0{,}95$ $\quad\mid\sigma > 3$ $\approx>$ $Bin_{50;\,p}(\mu-1{,}96\sigma \le X \le \mu+1{,}96\sigma) \ge 0{,}95$ $\Rightarrow$ $np-1{,}96\sqrt{np(1-p)} \le 32 \le np+1{,}96\sqrt{np(1-p)}$ $\quad\mid:n \;\mid h=\frac{32}{n}$ $\Leftrightarrow$ $-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le h-p \le 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ $\Leftrightarrow$ $(h-p)^2 \le 1{,}96^2 \cdot \frac{p(1-p)}{n}$ $\Leftrightarrow$ $(n+1{,}96^2)p^2 - (2hn+1{,}96^2)p + nh^2 \le 0$ $\quad\mid$quadrat. Ergänz. $\Leftrightarrow$ $p \lesseqgtr \frac{2hn+1{,}96^2 \pm 1{,}96\sqrt{1{,}96^2+4nh(1-h)}}{2(n+1{,}96^2)}$ $\Leftrightarrow$ $p \lesseqgtr \frac{h+\frac{1{,}96^2}{2n} \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1{,}96^2}{4n^2}+\frac{h(1-h)}{n}}}{1+\frac{1{,}96^2}{n}}$ $\quad\mid$abschätzen[1] $\approx>$ $h-1{,}96\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \le p \le h+1{,}96\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$ $\Rightarrow$ $0{,}5070 \le p \le 0{,}7730$	$0{,}025 \le Bin_{50;\,p}(X \le 32) \le 0{,}975$ $\Rightarrow$ $p \in [0{,}5123;\, 0{,}7708]$
$0{,}025 \le Bin_{44;\,0,5}(X \le x) \le 0{,}975$ für $0{,}025 \le Nor_{22;\,3,32}(X \le x) \le 0{,}975$ $\quad\mid$Quantilentabelle gilt $Nor_{22;\,3,32}(\mu-1{,}96\sigma \le X \le \mu+1{,}96\sigma) \ge 0{,}95$ $\Rightarrow$ $Nor_{22;\,3,32}(15{,}499 \le X \le 28{,}501) \ge 0{,}95$ $\quad\mid\sigma > 3$ $\approx>$ $Bin_{44;\,0,5}(15{,}499 \le X \le 28{,}501) \ge 0{,}95$ $\quad\mid$Stetigkeits-Korr. $\Rightarrow$ $Bin_{44;\,0,5}(15 \le X \le 28) \ge 0{,}95$ $\Rightarrow$ $x \in [15;\, 28]$	$0{,}025 \le Bin_{44;\,0,5}(X \le x) \le 0{,}975$ $\Rightarrow$ $x \in [16;\, 27]$

[1] Vernachlässigung der Terme $\frac{1{,}96^2}{n}$, $\frac{1{,}96^2}{2n}$ bzw. $\frac{1{,}96^2}{4n^2}$ gegenüber von 1, h bzw. $\frac{h(1-h)}{n}$ bei großem n.

Schlussbemerkungen

- Dieses neu entwickelte Excel-Tabellenblatt befreit den Stochastikunterricht von aufwendigen und ungenauen Verfahren. Sie werden ersetzt durch ein vielfältig anwendbares experimentell-numerisches Vorgehen, das für Schüler deutlich leichter zu verstehen und anzuwenden ist.
  Neue Möglichkeiten eröffnen sich bezüglich der Aufgabengestaltung und der Vermittlung der Inhalte. Es wird Raum geschaffen, um weiterführende Themen in Angriff nehmen zu können (z.B. Markoff-Ketten, Chi-Quadrat-Test).
- Auch Graphikfähige TR oder CAS könnten den klassischen Lehrgang mit Tabellen, Algebra und Transformationen durch ein experimentell-numerisches Vorgehen ersetzen. Dazu bedarf es aber eines ganz anderen Ansatzes.
- Ich verzichte seit Jahren auf tabellierte Wahrscheinlichkeitswerte und arbeite nur noch mit dem vorgestellten Excelblatt. Fast alle Schüler können mittlerweile zu Hause auf Excel zugreifen. Notfalls können sie für die Hausaufgaben die Rechner der Schulbibliothek nutzen.
  In Kurs- und Abiturarbeiten werden 4 Notebooks mit der Exceldatei bereitgestellt, über die die jeweils benötigten Werte abgerufen werden können. Dabei lösen die Schüler die Aufgaben so weit wie möglich im Heft ohne PC. Die gewünschten Werte können dann gegen Ende – für alle Aufgaben zusammen – ermittelt werden.
- Das Tabellenblatt ist ausbaubar, so dass es auch im Hochschulbereich verwendet werden kann. Einige stochastische Funktionen wie die χ^2-, t- und Fisher-Verteilung sind aus diesem Grund bereits eingearbeitet worden.
- Über meine Homepage kann die vorgestellte Exceldatei "stochastik.xls" kostenlos bezogen werden.

Anschrift des Verfassers

Stefan Bartz
Jakobstraße 16
54636 Meckel
www.stefanbartz.de

1 Aus didaktischen Gründen werden die Begriffe "Binomialfunktion" für $Bin_{n,p}(X = x)$ und "kumulierende Binomialfunktion" für $Bin_{n,p}(X \leq x)$, statt der für Schüler verwirrenden Begriffe "Binomialverteilung" und "Verteilungsfunktion der Binomialverteilung" verwendet. Die Schreibweisen knüpfen an die der Analysis an: Funktionsname mit 3 Buchstaben, x als Variablenname und in Klammern, Scharparameter als Index, also $Bin_{n,p}(x)$ analog zu $sin_t(x)$. Entsprechend wird bei den übrigen Verteilungen $Hyp_{n,R,N}(x)$, $Poi_{\mu}(x)$ und $Nor_{\mu,\sigma}(x)$ verfahren.

Stochastische Algorithmen I

PETER EICHELSBACHER, BOCHUM

Zusammenfassung: *Mit Hilfe der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich sogenannte stochastische Algorithmen auch im Schulbereich untersuchen. In einer ersten Darstellung klären wir den Unterschied zu deterministischen Lösungswegen, erinnern an ein Kartenspiel und stellen den Quicksort-Algorithmus und seine randomisierte Variante vor.*

Einleitung

Was ist ein stochastischer Algorithmus? Sehr einfach beantwortet ist es ein Algorithmus, bei dem der Zufall mit ins Spiel kommt. Was könnte das Interesse sein, einen bekannten, nicht vom Zufall beeinflussten Algorithmus (man nennt dies einen deterministischen Algorithmus) zu randomisieren?

Zwei Motivationen sollen hier besprochen werden.

1. Algorithmen sind erfunden worden für Situationen *endlicher* Probleme, etwa das Sortieren von Gegenständen nach einer Ordnung, z.B. das Sortieren einer Liste von Zahlen, das Prüfen zweier Zahlenreihen auf Gleichheit, das Auffinden eines optimalen Wertes einer Funktion auf einer endlichen Menge. Algorithmen suchen dabei möglichst effizient alle Möglichkeiten durch, und daher muss Endlichkeit gefordert werden. Doch schon einfachste Fragestellungen der obigen Art für endliche Situationen können zu Laufzeiten der Algorithmen führen, die z.B. die Lebensdauer der Erde bei weitem übersteigt, und benötigen Speicherplatz, der auch bei modernen Rechnern nicht zur Verfügung steht. Nun versucht man sein Glück mit randomisierten Algorithmen, um die Laufzeit zu verkürzen und den Speicherbedarf zu verkleinern.