VI. ÜBUNG zu GRUNDZÜGE der ALGEBRA

Abgabe: MI, 29. NOV. 2006, 11:00 UHR in den orangen Kasten Nr. **8**

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/GZ-Algebra/

Bitte geben Sie außer Ihrem Namen auch **deutlich** die Übungsgruppe mit an.

Zusatztermin: Am Mo 27.11.2006, 7:30 – 9:00 Uhr im Hörsaal D1 wird die Vorlesung vom 10.11. nachgeholt.

VORBEMERKUNGEN: Für eine Gruppe G sei $\mathrm{Aut}(G)$ die Gruppe der *Automorphismen* von G, d. h. aller Isomorphismen $\varphi : G \longrightarrow G$. Wir nennen einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \longrightarrow H$ *trivial*, wenn $\varphi(g) = e_H$ für jedes $g \in G$, also $\mathrm{Ker}\,\varphi = G$ gilt.

16. Aufgabe: Sei G eine Gruppe der Ordnung 15. Im folgenden soll gezeigt werden, dass G zyklisch ist. Man zeige:

a) Es gibt eine Untergruppe U der Ordnung 3 und eine Untergruppe V der Ordnung 5. Die Abbildung $m : U \times V \longrightarrow G$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$ ist bijektiv.

b) Sei $S(G/V)$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen von der Menge der Rechtsnebenklassen von V in sich, also $S(G/V) \simeq S_3$. Die Abbildung $\varphi : G \longrightarrow S(G/V)$, $g \mapsto \varphi_g$, wobei $\varphi_g(hV) = ghV$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

c) Das Bild von φ hat die Ordnung 3, also $\mathrm{Bild}\,\varphi \simeq \mathbb{Z}_3$.

d) Es gibt einen Normalteiler N in G der Ordnung 5.

e) Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $h_g : N \longrightarrow N$, $h_g(n) = gng^{-1}$ ein Automorphismus. Die Abbildung $\psi : U \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$, $u \mapsto h_u$ ist ein Gruppenhomomorphismus, der trivial ist. (Gibt es ein Element der Ordnung 3 in $\mathrm{Aut}(N) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$?)

f) Für alle $u \in U$ und $n \in N$ gilt $un = nu$.

g) Die Abbildung $m : U \times N \longrightarrow G$, $(u, n) \mapsto u \cdot n$ ist ein Isomorphismus.

h) $G \simeq \mathbb{Z}_{15}$. 15 P.

17. Aufgabe: Sei D_6 die Diedergruppe der Ordnung 12 mit den Elementen r und s der Ordnungen 6 bzw. 2 für die $sr = r^5 s$ gilt (vgl. Aufgabe 11.).

a) Man bestimme alle Konjugationsklassen in D_6.

b) Sei N die von r^3 erzeugte Untergruppe von D_6. Man zeige, dass N ein Normalteiler ist, und dass durch $\varphi(r^i s^j) \overset{def}{=} R^i S^j$ $(0 \leq i < 6,\ j = 0, 1)$, wobei R und S

die entsprechenden Elemente in D_3 der Ordnungen 3 und 2 sind, für die $SR = R^2S$ gilt, ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : D_6 \longrightarrow D_3$ definiert wird. Man folgere, dass die Faktorgruppe D_6/N isomorph ist zur Diedergruppe D_3. 10 P.

18. Aufgabe: Sei N ein Normalteiler in der Gruppe G. Man zeige, dass es eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Untergruppen U von G mit $N \subseteq U$ und der Menge der Untergruppen V von G/N gibt. 5 P.