IV. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 13. NOV. 2008, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar.

1. Aufgabe: Es gelte $n \geq 2$.

(a) Man zeige, dass für Matrizen A, $B \in \mathrm{M}(n;K)$ im allgemeinen nicht $AB = BA$ gilt.

(b) Man zeige, dass $A \stackrel{def}{=} E_n - E_{12} \in \mathrm{M}(n;K)$ invertierbar ist. (Man "errate" die zu A inverse Matrix.)

(c) Man zeige, dass die Gruppe $\mathrm{GL}(n;K)$ nicht abelsch ist.

2. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n;K)$. Es gebe ein $s \in \mathbb{N}$ mit $A^s \stackrel{def}{=} A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = 0$.

(a) Man gebe ein konkretes Beispiel $A \neq 0$ mit dieser Eigenschaft an.

(b) Man zeige, dass A nicht invertierbar ist.

(c) Man zeige, dass $E_n - A$ invertierbar ist. (Vgl. Aufgabe 1. (b))

3. Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}(n;K)$. Setze $B = A - {}^tA$. Man zeige, dass es $\lambda_{ij} \in K$ gibt (i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$) mit

$$B = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_{ij} \big(E_{ij} - E_{ji}\big).$$

4. Aufgabe: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;K)$.

(a) Man zeige: $A^2 - (a+d) \cdot A + (ad - bc) \cdot E_2 = 0$.

(b) Man folgere: A ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

5. Aufgabe: Für die Matrizen $A = (3i, 1+i, -i) \in \mathrm{M}(1,3;\mathbb{C})$ und $B = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3,1;\mathbb{C})$ berechne man AB und BA.