# II. Übung zur Linearen Algebra II

Abgabe: bis Mi, 29. Apr. 2009, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

`http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-2/`

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet $K$ immer einen Körper und $V$ einen $K$-Vektorraum.

**1. Aufgabe:**

(a) Man zeige: $T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$ ist irreduzibel.

(b) Sei $f \in \mathbb{R}[T]$, sei $z \in \mathbb{C}$. Man zeige: $f(z) = 0 \;\Rightarrow\; f(\overline{z}) = 0$.

(c) Man zeige, dass die normierten, irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[T]$ gerade durch

- $T - \alpha$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) und
- $T^2 - (z + \overline{z})T + z\overline{z}$ (mit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$)

gegeben sind.

(Der Fundamentalsatz der Algebra darf benutzt werden.)

**2. Aufgabe:** Sei $f \in K[T]$, $f \neq 0$. Man zeige, dass die Darstellung

$$f = a \cdot (T - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (T - \alpha_r)^{m_r} \cdot g$$

($g$ normiert, $g(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in K$) aus Bemerkung 19.15 eindeutig ist.

**3. Aufgabe:** Seien $x, y \in V$ Eigenvektoren eines Endomorphismus $f$ von $V$. Man untersuche, in welchen Fällen auch $x - y$ ein Eigenvektor von $f$ ist.

**4. Aufgabe:** Sei $\lambda \in K$ Eigenwert eines Endomorphismus $f$ von $V$. Sei

$$q = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n \in K[T]$$

ein Polynom. Man zeige, dass $q(\lambda)$ ein Eigenwert des Endomorphismus $q(f)$ ist.

**5. Aufgabe:** Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, deren Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Man zeige, dass $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$ Eigenwerte von $f$ sind.

(b) Man bestimme Basen der Eigenräume $E(f, 2)$ und $E(f, 3)$.

(c) Man zeige, dass $f$ diagonalisierbar ist.

(d) Man bestimme eine Basis aus Eigenvektoren von $f$ und gebe die dazu gehörige Darstellungsmatrix an.

**Termine der Tests:** 13.5., 3.6., 24.6. und 15.7. jeweils zu Beginn der Zentralübung, um 14:**00** Uhr.