IV. Übung zur Topologie

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Topologie/

17. Aufgabe: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter, aber nicht kompakter topologischer Raum. Sei $\infty \notin X$ und $X' \stackrel{def}{=} X \cup \{\infty\}$. Sei

$$\mathcal{S} \stackrel{def}{=} \mathcal{T} \cup \{X' \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\}.$$

Man zeige, dass $\mathcal{S}$ eine Topologie auf X' ist.

18. Aufgabe: Sei X ein topologischer Raum.

a) Seien A, $U \subseteq X$, wobei U offen ist. Man zeige $U \cap \overline{A} \subseteq \overline{U \cap A}$.

b) Sei X lokalkompakt. Man zeige: Ist $A \subseteq X$ lokalkompakt, so ist A offen in der Spurtopologie von $\overline{A}$.

c) Man zeige: Jede lokalkompakte Teilmenge eines lokalkompakten Raumes X ist von der Form $A \cap U$ mit A, $U \subseteq X$, wobei A abgeschlossen und U offen ist.

19. Aufgabe: Sei (X, d) ein abzählbar kompakter metrischer Raum. Man zeige:

a) Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für jedes $x \in X$ ein $i \in I$ mit $K_\delta(x) \subseteq U_i$ existiert. (Hinweis: Nehme an, es gibt eine offene Überdeckung, zu der kein solches $\delta > 0$ existiert.)

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Punkte in X derart, dass X von den offenen ε-Kugeln dieser Punkte überdeckt wird.

(Hinweis: Nehme an, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass b) falsch ist. Man zeige, dass es eine Folge (x_n) in X gibt derart, dass $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ gilt für alle $n \neq m$. Man folgere, dass X dann nicht abzählbar kompakt ist.)

20. Aufgabe: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeige:

$$X \text{ kompakt} \;\Leftrightarrow\; X \text{ abzählbar kompakt} \;\Leftrightarrow\; X \text{ folgenkompakt}.$$

(Hinweis: Für “X abzählbar kompakt $\Rightarrow$ X kompakt” verwende man Aufg. 19. a) und b).)